

LA DISTRIBUZIONE ASINTOTICA DEI GAIN IN FUNZIONI DI IMPULSO-RISPOSTA NON LINEARI

Carlo Grillenzoni

I. INTRODUZIONE (*)

La verifica empirica della *causalità* ha acquisito di recente un ruolo definito, soprattutto come momento intermedio nella costruzione di modelli operativi (analisi strutturale, previsione, controllo).

La sua moderna impostazione fa riferimento a due momenti precisi, come impostazione *concettuale* a Granger (69): la causalità tra due fenomeni stocastici (X), (Y), può definirsi solo in un contesto temporale (il passato causa presente e futuro, e non viceversa) e probabilistico (PDF-condizionali dei processi stocastici), se

$$f(y_t | y_{t-1}, y_{t-2}, \dots) \neq f(y_t | y_{t-1}, \dots; x_t, x_{t-1}, \dots) \quad (1.1)$$

si afferma che vi è causalità $\{X_t\} \rightarrow \{Y_t\}$.

Operativamente ed in ambito gaussiano, ragionare sulle PDF equivale a ragionare sui loro parametri. Le medie condizionali forniscono modelli di regressione dinamica lineari, cioè una rappresentazione dei processi stocastici stimabile efficientemente,

$$E[y_t | y_{t-1}, y_{t-2}, \dots] \quad : \quad y_t = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i y_{t-i} + e_t \quad (1.2)$$

$$E[y_t | y_{t-1}, \dots; x_t, x_{t-1}, \dots] \quad : \quad y_t = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i y_{t-i} + \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j x_{t-j} + a_t \quad (1.3)$$

Le varianze condizionali, stimabili a margine dei precedenti,

$$V[y_t | y_{t-1}, y_{t-2}, \dots] = \sigma_e^2 \quad (1.4)$$

$$V[y_t | y_{t-1}, \dots; x_t, x_{t-1}, \dots] = \sigma_a^2 \quad (1.5)$$

forniscono parametri di sintesi per la valutazione degli influssi causali di $\{X_t\} \rightarrow \{Y_t\}$ in termini di contributo esplicativo-previsivo $(\hat{\sigma}_e^2 - \hat{\sigma}_a^2) = \Delta \hat{\sigma}^2$.

Con Box-Jenkins (70) si è avuto un importante contributo *tecnico* con la messa a punto di una metodologia sistematica di costruzione di modelli "razionali", ottimali

(*) Ringrazio il Prof. D. Piccolo per le osservazioni critiche riguardanti l'impostazione e la stesura del lavoro. La responsabilità delle affermazioni fatte è unicamente mia.

per rappresentare con un limitato numero di parametri (1.2, 3) e stimare in modo corretto (1.4, 5).

Modelli che tendono a realizzare la stazionarietà nella covarianza (rispetto trend-ciclo e stagionalità) e nella varianza (eteroschedasticità) sono $I(d, D, \lambda)$,

$$(1-B)^{d_i} (1-B^{s_i})^{D_i} (Z_{i_t} - \mu_i)^{\lambda_i} = z_{i_t} \quad i = x, y \quad (1.6)$$

Modelli (1.2) con struttura razionale sono ARMA $[(p, q) \circ (P, Q)]$

$$\begin{aligned} (1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p) (1 - \Phi_1 B^{s_1} - \dots - \Phi_P B^{s_P}) z_{i_t} = \\ = (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q) (1 - \Theta_1 B^{s_1} - \dots - \Theta_Q B^{s_Q}) e_{i_t} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Infine modelli di interesse cruciale per l'analisi della causalità sono quelli a funzione di impulso-risposta IRF (r, s, b)

$$(1 - \delta_1 B - \dots - \delta_r B^r) e_{it} = (\omega_0 - \omega_1 B - \dots - \omega_s B^s) B^b e_{jt} + a_{it} \quad i, j = x, y \quad (1.8)$$

Integrando modelli IRF e ARMA si ottengono modelli a funzione di trasferimento TF, corrispondenti razionali di (1.3)

$$z_{it} = V_{ij}(B) z_{jt} + \psi_i(B) a_{it} \quad i, j = x, y \quad (1.9)$$

$$V_{ij}(B) = \frac{\omega_j(B)}{\delta_i(B)} B^{bj} = \sum_{k=1}^{\infty} v_{ijk} B^{k+bj}; \quad \psi_i(B) = \frac{\theta_i(B) \Theta_i(B)}{\phi_i(B) \Phi_i(B)} = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_{ik} B^k$$

Risulta abbastanza sterile parlare di causalità in termini di sola azione esplicativa, lasciando in ombra il problema dell'*impatto moltiplicativo* (positivo, negativo, nullo). I modelli di Box-Jenkins forniscono misure di questo effetto in modo agevole. Avendo dalla (1.9).

$$\delta(B) V(B) = \omega(B) B^b$$

è possibile risolvere questa equazione direttamente per $V(B)$, eguagliando i coefficienti corrispondenti a medesime potenze di (B) , ottenendo la sequenza dei pesi IRF

$$\{v_k\}_{k=0}^{\infty}$$

$$\begin{aligned} v_b &= \omega_0 \\ v_{b+1} &= \delta_1 v_b - \omega_1 \end{aligned} \quad (1.10)$$

⋮
⋮
⋮

$$v_k = \delta_1 v_{k-1} + \dots + \delta_r v_{k-r} \quad k > (b+s)$$

Sotto condizioni di stabilità la sequenza $\{v_k\}$ converge a zero

$$(\delta(B) = 0 : |r_b| > 1 \quad \forall b = 1, 2, \dots, r) \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} v_k = 0$$

dove (r_b) rappresenta la radice b -esima. Sotto queste condizioni inoltre il limite della

serie $\left\{ \sum_{k=0}^n v_k B^k \right\}_{n=0}^{\infty}$ con $|B| = 1$ è finito

$$\begin{aligned} g &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n v_k 1^k = \sum_{k=1}^{\infty} v_k < \infty \\ &= V(1) = \frac{\omega(1)}{\delta(1)} = \left(\frac{\omega_0 - \omega_1 - \dots - \omega_s}{1 - \delta_1 - \dots - \delta_r} \right) \end{aligned} \quad (1.11)$$

e viene definito "guadagno di stato-stabile" (*gain*).

$[g]$ rappresenta l'effetto dinamico complessivo su $\{Y_t\}$ prodotto da una variazione unitaria di $\{X_t\}$.

In questi anni le verifiche empiriche in campo economico che hanno utilizzato congiuntamente definizione di Granger e tecniche Box-Jenkins sono state numerose, ad esempio Carlucci (79), Fiebig (80), Hanssens (80), Maloney-Ireland (80), (1).

In generale la loro impostazione ha due punti discutibili,

i) non sono state adottate misure di significatività statistica per $\Delta \hat{\sigma}^2$, ed alcuni autori pur in presenza di variazioni molto esigue (1%) hanno affermato l'esistenza di causalità. Si vedrà successivamente come un ricorso al GLRT risolve il problema.

ii) Non tutti gli autori hanno utilizzato g , e chi l'ha fatto ancora una volta non si è posto il problema di misure di significatività. Questo è un problema abbastanza complesso, connesso a quello delle proprietà asintotiche degli stimatori dei modelli ARMA-TF, e costituirà l'oggetto centrale di questo lavoro.

II. LA DISTRIBUZIONE ASINTOTICA DEI GAIN

2.1 Stima non-lineare e proprietà asintotiche

Nella letteratura sulla stima sono stati affrontati approfonditamente, ma separatamente, due problemi *atipici* che invece vanno considerati congiuntamente per i modelli ARMA-TF.

1 - Da un lato la stima di modelli lineari con regressori stocastici, ad esempio equazioni alle differenze lineari stocastiche (AR). Adottando procedimenti di stima ML, per i quali è stato agevole definire la LF, si è dimostrato a più riprese, Mann-Wald (43), Anderson (59), Anderson (71), Pagano (74), che gli stimatori dei parametri sono consistenti ed asintoticamente normali (CAN).

2 - Dall'altro lato la stima di modelli non lineari con regressori fissi, ad esempio modelli a ritardi distribuiti razionali con variabili esogene. La stima è stata affrontata

(1) I lavori citati non vanno confusi con quelli che hanno utilizzato il test "S", Haugh (76), Feige-Pearce (76), Pierce (77), Calliari-Sartore (80), equivalente al test su $\Delta \hat{\sigma}^2$ ma inefficiente perché utilizza il metodo di stima dei momenti.

ta combinando soluzioni numeriche iterative e teoria dei minimi quadrati (LSE), Hartley-Booker (65), Amemya-Fuller (67), Jennrich (69), Dhrymes-Klein-Steiglitz (70), ancora una volta le conclusioni raggiunte sono di stimatori CAN.

Per quanto riguarda i modelli ARMA-TF vi è sostanzialmente un "gap" tra formulazioni teoriche e soluzioni pratiche. Teoricamente si è cercato di stabilire una continuità metodologica tra definizione di processo stocastico (PDF multivariata), struttura dei modelli (in relazione alle medie condizionali) e metodi di stima ML (in relazione alla forma della PDF).

Nel contesto gaussiano l'accento è stato posto sulla specificazione della LF-esatta, in particolare nella stima incondizionata della RSS che compare all'esponente per ottenere stime "full ML", Box-Jenkins (70), Newbold (74), Osborn (77), Phadke-Kedem (78) Hillmer-Tiao (79).

La difficoltà ad esplicitare lo stimatore-ML da LF così complicate ha indirizzato la ricerca verso tecniche basate sulla decomposizione spettrale delle serie (già introdotte da Whittle (61)), Hannan (70), Hannan-Nicholls (72), Hannan (75), Nicholls (76), Dunsmuir (79). Sulla base di inconsueti stimatori ML-spetttrali si sono dimostrate le proprietà CAN.

Da un punto di vista pratico i problemi posti da tali stimatori (stima efficiente della trasformazione spettrale e senza perdita di informazione), sono stati tali da renderli inagibili, ed imporre il ricorso alle collaudate tecniche iterative dei minimi quadrati non lineari (NLLS) di Hartley (61), Marquardt (63), Draper Smith (66) da parte di Box-Jenkins (70), Pierce (70), Wilson (73).

Il problema teorico sulle proprietà asintotiche è stato affrontato da Pierce (71), Pierce (72), assumendo a posteriori residui normali ed operando sulla LF nel consueto modo dei testi di statistica matematica per dimostrare le proprietà CAN degli stimatori ML. Come dire che in ambito Gaussiano LSE = MLE e quindi che le stime NLLS hanno automaticamente le proprietà CAN delle stime ML, ⁽²⁾.

Questa impostazione non solo è didatticamente scorretta, ma è anche poco soddisfacente dal punto di vista tecnico ⁽³⁾:

Cosa accade se il processo WN è solo approssimativamente normale? Le proprietà CAN delle stime NLLS sono state dimostrate esaudientemente solo per regressori fissi, e la stima NLLS non equivale semplicemente ad una serie di stime OLS!

Che ipotesi bisogna porre per la convergenza stocastica del procedimento iterativo, e in che relazione sono le proprietà asintotiche con tali ipotesi e con gli algoritmi di stima?

In questo paragrafo si tende a riformulare il problema, partendo dal procedimento di stima effettivamente impiegato, utilizzando tecniche della statistica matematica ormai collaudate ed allacciandosi direttamente a Box-Jenkins (70) pp. 233, 291.

Si scriva il modello TF (1. 9) in forma "autoregressiva"

$$a_{i_t} = \left(\frac{\phi_i(B) \Phi_i(B)}{\theta_i(B) \Theta_i(B)} \right) z_{i_t} + \left(\frac{\omega_j(B) \phi_j(B) \Phi_j(B)}{\delta_j(B) \theta_j(B) \Theta_j(B)} B^{b_j} \right) z_{j_t} \quad i, j = x, y \quad (2.1.1)$$

cioè $a_t = V(z_t; b^0)$ non lineare interamente stocastica, in cui:

⁽²⁾ Soluzioni vecchie e nuove basate sul metodo dei momenti, a parte, Walker (62), Godolphin (77).

⁽³⁾ Non è casuale che in tutte le 500 pagine di Box-Jenkins non si trova alcun riferimento alle proprietà asintotiche.

$$\{z'_t\} = \{x_t, y_t\}, \quad t = (1, 2, \dots, n), \quad n = (N - d - sD)$$

$$b^0 = (\delta_1^0, \dots, \delta_r^0; \omega_0^0, \dots, \omega_s^0; \phi_1^0, \dots, \phi_p^0; \theta_1^0, \dots, \theta_q^0; \Phi_1^0, \dots, \Phi_p^0; \Theta_1^0, \dots, \Theta_Q^0) \in B$$

$$B \subset \mathbb{R}^k, \quad k = [(r + s + 1) + (p + q) + (P + Q)]$$

Si formulino ora le ipotesi standard per modelli a serie storiche

- i) $\{a_t\}$ Processo WN: $E[a_t] = 0, V[a_t] = \sigma^2, E[a_{t-k} a_t] = 0, \forall t \forall k \neq 0$
- ii) $\{z_t\}$ Processo Stazionario-I: $E[z_t] = 0, E[z_{i,t-k}, a_t] = 0, \forall i \forall t \forall k$
- iii) (B) Regione di Stazionarietà-II, (4):

$$\forall b \in B: (\delta_i(B) = 0, \phi_i(B) = 0, \theta_i(B) = 0, \Phi_i(B) = 0, \Theta_i(B) = 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |r_{i_b}| > 1, \quad \forall i \forall b$$

Si definiscano ora le matrici stocastiche, in cui $\{z_t\}$ è implicito

$$V(b) = \left\{ v_{ij} = \frac{\partial V(z_t; b)}{\partial b_j} \right\}_{(n \times k)}; \quad \text{vettore } (t): [v_t(b)]$$

$$W(b) = \left\{ w_{ij} = \frac{\partial^2 V(z_t; b)}{\partial b_i \partial b_j} \right\}_{(k \times k \times n)}; \quad \text{matrice } (t): [w_t(b)]$$

Dalle ipotesi precedenti seguono alcune utili condizioni

$$a) \{v_t(b)\} = O_p(1), \{w_t(b)\} = O_p(1), \quad \forall b \in B :$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists M_\epsilon \in \mathbb{R}^+: p\{|v_{ij}; w_{ij}| \geq 1 \cdot M_\epsilon\} \leq \epsilon \quad \forall t \forall ij$$

Le derivate sono uniformemente (in t) limitate in probabilità su B . E' facile osservare che le derivate (rispetto b) di un processo stocastico stazionario-I $\{V(z_t; b)\}$, formano un processo stocastico $\{v_t(b)\}$ ancora stazionario-I se $b \in B$, (5). Ora la stazionarietà-II di $\{v_t(b)\}$ implica che i momenti di Π° siano finiti $\forall t, O(1)$; ma ciò si verifica solo se $\{v_t(b)\} = O_p(1)$,

$$\forall b \in B : E[v'_t(b) v_t(b)] = O(1) \Leftrightarrow \{v_t(b)\} = O_p(1)$$

$$b) \lim_{b \rightarrow b^0} p[v_t(b) = v_t(b^0)] = 1; \quad \lim_{b \rightarrow b^0} p[w_t(b) = w_t(b^0)] = 1; \quad \forall t, \forall b \in B$$

(4) Per stazionarietà-I si intende stabilità rispetto (t) della intera PDF, per stazionarietà-II si intende stabilità dei soli momenti di Π° .

(5) Ad esempio $-\frac{\partial V(z_t; b)}{\partial \omega_j} = \frac{\phi_i(B) \Phi_i(B)}{\delta_i(B) \theta_i(B) \Theta_i(B)} B^{j+b_j} z_{jt} = u_t$ è stazionario se $b \in B$.

Le derivate sono uniformemente continue in \mathbf{b} su \mathbf{B} (con $p = 1$, cioè per \mathbf{b} che varia in modo deterministico). Questa è una condizione molto generale, soddisfatta se \mathbf{b} è continuo su \mathbf{B} .

$$c) \quad \exists \hat{\mathbf{b}}_n \in \mathbf{B} : (\hat{\mathbf{b}} - \mathbf{b}^0) = O_p(a_n), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

Esista uno stimatore iniziale $\hat{\mathbf{b}}$ p -consistente per \mathbf{b}^0 e che appartenga a \mathbf{B} . Se $\{\mathbf{z}_t\}$ è stazionario-I è possibile avere stimatori CAN col metodo dei momenti, Walker (62).

$$d) \quad E [v'_t(\mathbf{b}), v_t(\mathbf{b})] = \mathbf{M}(\mathbf{b}) \quad \forall t \quad \forall \mathbf{b} \in \mathbf{B} \quad e$$

$$\text{plim}_{n \rightarrow \infty} [n^{-1} \mathbf{V}'(\mathbf{b}) \mathbf{V}(\mathbf{b})] = \mathbf{M}(\mathbf{b}) \quad \forall \mathbf{b} \in \mathbf{B}$$

Essendo $\{v_t(\mathbf{b})\}$ stazionario-I sarà anche stazionario-II (prima condizione) ed ergodico rispetto ai momenti di II°, cioè gli stimatori campionari di questi momenti sono MSE-consistenti e quindi p -consistenti (seconda condizione), Hannan (70).

Prendendo spunto da Fuller (76) pg. 211, per il caso di NLLS-regressori fissi, si definisca la funzione obiettivo

$$Q(\mathbf{b}) = \mathbf{a}' \mathbf{a} = \sum_{t=1}^n [V(\mathbf{z}_t; \mathbf{b})]^2 \quad (2.1.2)$$

Sviluppando in serie di Taylor $V(\mathbf{z}_t; \mathbf{b}^0)$ attorno al punto $\mathbf{b} = \hat{\mathbf{b}}$

$$V(\mathbf{z}_t; \mathbf{b}^0) = V(\mathbf{z}_t; \hat{\mathbf{b}}) - v'_t(\hat{\mathbf{b}}) (\mathbf{b}^0 - \hat{\mathbf{b}}) - \frac{1}{2} (\mathbf{b}^0 - \hat{\mathbf{b}})' w_t(\hat{\mathbf{b}}) (\mathbf{b}^0 - \hat{\mathbf{b}}) \quad (2.1.3)$$

dove $\hat{\mathbf{b}}$ giace sull'iperpiano che congiunge \mathbf{b}^0 e $\hat{\mathbf{b}}$, l'espressione precedente può anche essere scritta nella forma

$$a_t = a_t(\hat{\mathbf{b}}) - v'_t(\hat{\mathbf{b}}) \Delta^0 - r_t(\hat{\mathbf{b}}) \quad , \quad \Delta^0 = (\mathbf{b}^0 - \hat{\mathbf{b}}) \quad (2.1.4)$$

Essendo \mathbf{b}^0 incognito si può pensare ad un punto generico \mathbf{b} intermedio tra \mathbf{b}^0 , $\hat{\mathbf{b}}$ in cui valga la linearizzazione seguente

$$V(\mathbf{z}_t; \mathbf{b}) = V(\mathbf{z}_t; \hat{\mathbf{b}}) - v'_t(\hat{\mathbf{b}}) (\mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}}) \quad (2.1.5)$$

L'espressione linearizzata corrispondente della funzione obiettivo

$$\begin{aligned} \hat{Q}(\mathbf{b}) &= \sum_{t=1}^n [V(\mathbf{z}_t; \hat{\mathbf{b}}) - v'_t(\hat{\mathbf{b}}) (\mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}})]^2 = \\ &= [\mathbf{a}(\hat{\mathbf{b}}) - \mathbf{V}(\hat{\mathbf{b}}) (\mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}})]' [\mathbf{a}(\hat{\mathbf{b}}) - \mathbf{V}(\hat{\mathbf{b}}) (\mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}})] \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

e lo stimatore LS che la minimizza

$$(\hat{\mathbf{b}} - \hat{\mathbf{b}}) = [\mathbf{V}'(\hat{\mathbf{b}}) \mathbf{V}(\hat{\mathbf{b}})]^{-1} \mathbf{V}'(\hat{\mathbf{b}}) \mathbf{a}(\hat{\mathbf{b}}) \quad , \quad \tilde{\Delta} = (\hat{\mathbf{b}} - \hat{\mathbf{b}}) \quad (2.1.7)$$

Lo stimatore iterativo Gauss-Newton relativo alla prima iterazione

$$\tilde{\mathbf{b}} = (\hat{\mathbf{b}} + \tilde{\Delta}) \quad (2.1.8)$$

che corrisponde al punto intermedio \mathbf{b} a cui si è accennato.

Per il calcolo delle derivate si può adottare un procedimento numerico basato sulla "perturbazione" dei parametri presi singolarmente, Draper-Smith (66) pg. 270,

$$V(\hat{b}) = \{ \hat{v}_{tj} = [(a_t | z_t; \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_j, \dots, \hat{b}_k) - (a_t | z_t; \hat{b}_1, \dots, (\hat{b}_j + \epsilon_j), \dots, \hat{b}_k)] / \epsilon_j \} \quad (2.1.9)$$

Il problema conseguente del calcolo incondizionato degli a_t è risolvibile con procedure "back-forecasting", Box-Jenkins (70) pg. 199. Per l'analisi asintotica occorre valutare l'influenza del residuo dello sviluppo, sullo stimatore. Sostituendo (2.1.4) espressa in forma vettoriale, nella (2.1.7)

$$\tilde{\Delta} = V^{-1}(\hat{b}) a(\hat{b}) = V^{-1}(\hat{b}) [a + V(\hat{b}) \Delta^0 + r(\hat{b})] \quad (2.1.10)$$

e sviluppando algebricamente si ottiene che

$$(\tilde{\Delta} - \Delta^0) = V^{-1}(\hat{b}) a + [V'(\hat{b}) V(\hat{b})]^{-1} R(\hat{b}), \quad R(\hat{b}) = V'(\hat{b}) r(\hat{b}) \quad (2.1.11)$$

ma si ha anche dalla (2.1.8)

$$(\tilde{\Delta} - \Delta^0) = (\tilde{b} - \hat{b}) - (b^0 - \hat{b}) = (\tilde{b} - b^0) \quad (2.1.12)$$

Allora per analizzare le proprietà asintotiche dello stimatore occorre analizzare ogni elemento di cui è composta la (2.1.11), in base alle ipotesi iniziali (i, ii, iii) ed alle loro implicazioni (a, b, c, d).

Il secondo elemento della (2.1.11) può essere scritto come

$$(I) \quad [V'(\hat{b}) V(\hat{b})]^{-1} R(\hat{b}) = [n^{-1} V'(\hat{b}) V(\hat{b})]^{-1} n^{-1} R(\hat{b})$$

in base alla (a), per le proprietà dell'operatore d'ordine, Fuller (76) pg. 184, si ha che la matrice ($n \circ k$)

$$\begin{aligned} V(b) W(b) &= \sum_{t=1}^n [v_t'(b) w_t(b)] = \\ &= \sum_{t=1}^n [\sum_{ij} \Pi_{ij} O_p(1)] = O_p(1) \quad \forall b \in B \end{aligned}$$

Poiché il risultato tiene anche per $b = \hat{b}$, in base alla (c), si ha

$$\begin{aligned} (IA) \quad n^{-1} R(\hat{b}) &= n^{-1} V'(\hat{b}) \frac{1}{2} (b^0 - \hat{b})' W(\hat{b}) (b^0 - \hat{b}) \\ &= O_p(a_n) O_p(1) O_p(a_n) = O_p(a_n^2) \end{aligned}$$

infatti $\{n^{-1}\}$ è una serie convergente a zero. Ancora dalla (c) e (b)

$$n^{-1} [V'(\hat{b}) V(\hat{b})] = n^{-1} [V'(b^0) V(b^0)] + O_p(a_n^2) \quad (6)$$

(6) $\lim_{b \rightarrow b^0} p [v_t(b) = v_t(b^0)] = 1 \Rightarrow \text{plim}_{n \rightarrow \infty} v_t(\hat{b}) = v_t(b^0) : v_t(\hat{b}) = v_t(b^0) + O_p(a_n)$.

e per il teorema di Slutsky sulla "intercambiabilità" dell'operatore (plim) dalla (d) segue che

$$(IB) \quad \text{plim} [n^{-1} V'(\hat{\mathbf{b}}) V(\hat{\mathbf{b}})]^{-1} = [\text{plim} n^{-1} V'(\mathbf{b}^0) V(\mathbf{b}^0) + \text{plim} O_p(a_n^2)]^{-1} = \\ = M^{-1}(\mathbf{b}^0)$$

Come risultato intermedio, combinando (IA), (IB) e per $(n \rightarrow \infty)$

$$(\tilde{\mathbf{b}} - \mathbf{b}^0) = V^{-1}(\hat{\mathbf{b}}) \mathbf{a} + M^{-1}(\mathbf{b}^0) O_p(a_n^2) \xrightarrow{P} V^{-1}(\hat{\mathbf{b}}) \mathbf{a} \quad (2.1.13)$$

Per analizzare il comportamento asintotico di questo secondo elemento, occorre moltiplicare per \sqrt{n}

$$(II) \quad \sqrt{n}(\tilde{\mathbf{b}} - \mathbf{b}^0) = [n^{-1} V'(\hat{\mathbf{b}}) V(\hat{\mathbf{b}})]^{-1} V'(\hat{\mathbf{b}}) \mathbf{a} n^{-1/2}$$

il comportamento della prima matrice è dato da (IB), il secondo vettore verrà analizzato con le tecniche del teorema del limite centrale multivariato

Proposizione (1) — La sequenza delle derivate prime calcolate in $(\hat{\mathbf{b}})$ con la (2.1.9) è stazionaria-I — congiuntamente incorrelata, ed ha momenti

$$E[v_t(\hat{\mathbf{b}})] = \mathbf{0}, \quad E[v_t'(\hat{\mathbf{b}}) v_t(\hat{\mathbf{b}})] = M(\mathbf{b}^0)$$

Dimostrazione — $\{v_t(\hat{\mathbf{b}})\} = \{\hat{v}_{1t}, \dots, \hat{v}_{kt}\}$, ogni singola componente $\{\hat{v}_{jt}\}$ risulta dalla combinazione di due sequenze $\{\hat{a}_t = V(z_t, \hat{\mathbf{b}})\}$, $\{\hat{a}_t^{(j)} = V(z_t, \hat{\mathbf{b}}^{(j)})\}$, stazionarie-I prive di ACR perché ottenute dal filtraggio di una sequenza z_t stazionaria-I, con filtri (2.1.1) i cui parametri $\hat{\mathbf{b}}, \hat{\mathbf{b}}^{(j)} \in \mathbf{B}$, e depurano $\{z_t\}$ dalla ACR significativa. $\{\hat{a}_t\}, \{\hat{a}_t^{(j)}\}$, sono stime "simili" del processo WN, e per (ϵ_j) sufficientemente piccolo sono fortemente, ma solamente, correlate a livello simultaneo. $\{\hat{v}_{jt} = (\hat{a}_t - \hat{a}_t^{(j)})/\epsilon_j\}$ è stazionaria-I priva di ACR

$$E[\hat{v}_{jt-b} \hat{v}_{jt}] = \\ = \frac{1}{(\epsilon_j)^2} \{E[\hat{a}_{t-b} \hat{a}_t] - E[\hat{a}_{t-b} \hat{a}_t^{(j)}] - E[\hat{a}_{t-b}^{(j)} \hat{a}_t] + E[\hat{a}_{t-b}^{(j)} \hat{a}_t^{(j)}]\} \simeq 0 \quad \forall j, b \neq 0$$

$\{\hat{a}_t^{(i)}\}, \{\hat{a}_t^{(j)}\}$, sono ancora stime simili, e per $(\epsilon_i; \epsilon_j)$ sufficientemente piccoli la CCR tra qualsiasi coppia $\{\hat{v}_{it}\}, \{\hat{v}_{jt}\}$ è nulla,

$$E[\hat{v}_{it-b} \hat{v}_{jt}] = \\ = \frac{1}{\epsilon_i \epsilon_j} \{E[\hat{a}_{t-b} \hat{a}_t] - E[\hat{a}_{t-b} \hat{a}_t^{(j)}] - E[\hat{a}_{t-b}^{(i)} \hat{a}_t] + E[\hat{a}_{t-b}^{(i)} \hat{a}_t^{(j)}]\} \simeq 0 \quad \forall ij, b$$

La tesi della proposizione segue dal fatto che i risultati precedenti sono validi $\forall j \forall ij$; per i momenti, poiché $\text{plim}(\cdot) = \lim E(\cdot)$ dalla (IB) si ha

$$\begin{aligned} M(b^0) &= \text{plim} [n^{-1} V'(\hat{b}) V(\hat{b})] = \lim E [n^{-1} \sum_{t=1}^n v'_t(\hat{b}) v_t(\hat{b})] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ n^{-1} \sum_{t=1}^n E [v'_t(\hat{b}) v_t(\hat{b})] \right\} = E [v'_t(\hat{b}) v_t(\hat{b})] \end{aligned}$$

poiché $v_t(\cdot)$ è stazionaria-I e \hat{b} è stazionaria-II. ▲

Moltiplicando la relazione da indagare per un vettore c non stocastico, si definisca

$$\begin{aligned} c [n^{-1/2} V'(\hat{b}) a] &= n^{-1/2} \sum_{t=1}^n [c' v'_t(\hat{b}) a_t] \\ &= n^{-1/2} \sum_{t=1}^n [v_t] = \tilde{v}_n \end{aligned}$$

Proposizione (2) — Sia $\{v'_t(\hat{b})\}$ la sequenza delle derivate prime calcolate in (\hat{b}) , sia a_t la sequenza dei termini di disturbo WN e (c) un vettore di costanti, la serie

$$\{v_t\}_{t=1}^n = \{c' v'_t(\hat{b}) a_t\} \quad \text{è (iid)}$$

Dimostrazione — Per (ϵ_j) sufficientemente piccoli, $\{v'_t(\hat{b})\}$ è incorrelata da $\{a_t\}$:

$$E [\hat{v}_{jt} a_t] = \frac{1}{\epsilon_j} \{E [\hat{a}_t a_t] - E [\hat{a}_t^{(j)} a_t]\} \simeq 0 \quad \forall j$$

essendo gli elementi tra parentesi simili. Si definisca ora la sequenza

$$c' v'_t(\hat{b}) = \sum_{i=1}^k c_i \hat{v}_{it} = \hat{u}_t$$

questa è ancora stazionaria-I priva di ACR, incorrelata da $\{a_t\}$

$$E [\hat{u}_{t-b} \hat{u}_t] = c' E [v'_{t-b}(\hat{b}) v_t(\hat{b})] c \simeq 0 \quad \forall b \neq 0$$

$$E [\hat{u}_t a_t] = \sum_{i=1}^k c_i E [\hat{v}_{it} a_t] \simeq 0$$

La sequenza $\{v_t\} = \{\hat{u}_t a_t\}$ è essa pure stazionaria-I priva di ACR, e quindi (iid),

$$E [v_{t-b}, v_t] = E [\hat{u}_{t-b}] \cdot E [a_{t-b}] \cdot E [\hat{u}_t] \cdot E [a_t] \simeq 0 \quad \forall b \neq 0$$

essendo gli elementi tra parentesi ortogonali (incorrelati e con media nulla), inoltre il prodotto di sequenze stazionarie-I prive di ACR e CCR è ancora stazionario-I.

Come conseguenza di questa proposizione $\{\tilde{v}_n\}$ rappresenta la serie di un certo tipo di media campionaria, e per il teorema del limite centrale converge in distribuzione ad una normale. ▲

Teorema (1) — Se le Proposizioni (1), (2), sono soddisfatte, la serie stocastica $\{n^{-1/2} V'(\hat{b}) a\}$ converge in distribuzione ad una variabile casuale distribuita $N [0; \sigma^2 M(b^0)]$.

Dimostrazione — Prendendo spunto dal caso di matrice $V(\cdot)$ non stocastica, Pollock

(79) pg. 334, la sequenza delle funzioni caratteristiche (CF) corrispondente a $\{\tilde{v}_n\}$ è

$$\tilde{\phi}_n\left(\frac{b}{\sqrt{n}}\right) = E \left[\exp \left(i \frac{b}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n v_t \right) \right] = E \left[\exp \left(i \frac{b}{\sqrt{n}} v_t \right) \right]^n$$

l'ultima è dovuta al fatto che le $\{v_t\}$ sono (iid).

Poiché $\exp(\cdot)$ è una funzione continua nell'origine, è possibile considerarne uno sviluppo in serie in $(b=0)$

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_n\left(\frac{b}{\sqrt{n}}\right) &= E \left[1 + i \frac{b}{\sqrt{n}} v_t - \frac{1}{2} \frac{b^2}{n} v_t^2 + o_p\left(\frac{b^2}{n}\right) \right]^n \\ &= \left[1 - \frac{1}{2} \frac{b^2}{n} \sigma^2 E [c' v_t(\hat{b})]^2 + o\left(\frac{b^2}{n}\right) \right]^n = [1 + (z)]^n \quad (\text{"say"}) \quad (7) \\ o\left(\frac{b^2}{n}\right) &= \left[k_3 \frac{b^3}{\sqrt{n} n} + k_4 \frac{b^4}{n^2} + \dots \right] \end{aligned}$$

Si può verificare inoltre, Cramer (46) pg. 217, che sviluppando in serie $\log(1+z)$ nel punto $(z=0)$ si ha $\log(1+z) = (z + \xi z^2)$, $|\xi| < 1$ e quindi ponendo $\left(k_2 \frac{b^2}{n}\right) = o\left(\frac{b}{\sqrt{n}}\right)$ si ottiene

$$\begin{aligned} \log \tilde{\phi}_n\left(\frac{b}{\sqrt{n}}\right) &= n \left(z + \left[o\left(\frac{b^2}{n}\right) + o\left(\frac{b^3}{\sqrt{n} n}\right) + o\left(\frac{b^4}{n^2}\right) \right] \right) \\ &= n \left[z + o\left(\frac{b^2}{n}\right) \right] \end{aligned}$$

Sostituendo, considerando il limite, dalla proposizione (1)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \log \tilde{\phi}_n\left(\frac{b}{\sqrt{n}}\right) &= \lim \left[-\frac{1}{2} b^2 \sigma^2 c' E [v'(\hat{b}) v(\hat{b})] c + n o\left(\frac{b^2}{n}\right) \right] \\ &= -\frac{1}{2} b^2 \sigma^2 c' M(b^0) c \end{aligned}$$

che equivale a $\tilde{\phi}_n\left(\frac{b}{\sqrt{n}}\right) \rightarrow \exp \left[-\frac{1}{2} b^2 \sigma^2 c' M(b^0) c \right]$. Quest'ultima rappresenta la CF di una variabile casuale normale, per il Teorema della Continuità (biunivocità tra CF-PDF) si ha $\tilde{v}_n \xrightarrow{L} N[0, \sigma^2 c' M(b^0) c]$. Poiché questo risultato è valido $\forall c$ si conclude, Rao (65) pg. 108,

$$(IIB) \quad n^{-1/2} V'(\hat{b}) a \xrightarrow{L} N[0, \sigma^2 M(b^0)]$$

Considerando congiuntamente (IB) e (IIB), è possibile avere la distribuzione asintotica dello stimatore Gauss-Newton.

(?) Infatti $(i)^2 = -1$; $\{a_t\}$, $\{v_t(\cdot)\}$ sono incorrelate; inoltre

$$k_j = (i)^j \frac{1}{j} E [a]^j E [c' v_t(\hat{b})]^j ; \quad o\left(\frac{b^2}{n}\right) : \lim_{n \rightarrow \infty} o\left(\frac{b^2}{n}\right) / \frac{b^2}{n} = \lim_{b \rightarrow 0} o\left(\frac{b^2}{n}\right) / \frac{b^2}{n} = 0$$

Teorema (2) – Date due sequenze di variabili casuali di dimensioni $(k \cdot k)$, $(k \cdot 1)$, convergenti rispettivamente in probabilità (P) e in distribuzione (L) ad una matrice non stocastica e ad un vettore normale

$$[n^{-1} V'(\hat{b}) V(\hat{b})]^{-1} \xrightarrow{P} M^{-1}(b^0); \quad [n^{-1/2} V'(\hat{b}) a] \xrightarrow{L} N[0, \sigma^2 M(b^0)]$$

il loro prodotto converge in distribuzione ad un vettore normale

$$\sqrt{n} (\tilde{b} - b^0) \xrightarrow{L} N[0; \sigma^2 M^{-1}(b^0)] \tag{2.1.14}$$

Dimostrazione – Si scriva il prodotto (2.1.14) come $\{A_n\} \cdot \{y_n\} = \{b_n\}$, dalle ipotesi

$$\begin{aligned} \{A_n\} &\xrightarrow{P} A & : & \{a_{ijn}\} \xrightarrow{P} a_{ij} & \forall ij \\ \{y_n\} &\xrightarrow{L} y \sim N & : & \{y_{in}\} \xrightarrow{L} y_i \sim N & \forall i \end{aligned} \Rightarrow \{a_{ijn} y_{in}\} \xrightarrow{L} a_{ij} y_i \sim N \quad \forall ij$$

quest'ultima deriva dalla versione univariata del teorema data da Rao (65) pg. 102. Poiché la combinazione di serie convergenti in distribuzione ad una stessa distribuzione è stabile se questa è normale

$$\{b_{in}\} = \left\{ \sum_{j=1}^k a_{ijn} y_{jn} \right\} \xrightarrow{L} N(\cdot)$$

e poiché il risultato è valido $\forall i$ si ha che $b_n \xrightarrow{L} N(\cdot)$.
Per quanto riguarda i momenti asintotici

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E[b_n] &= \lim E[A_n y_n] = A E[y] = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} E[b'_n b_n] &= A' E[y' y] A = A' \sigma^2 A^{-1} A = \sigma^2 M^{-1}(b^0) \end{aligned}$$

Corollario (1) – Lo stimatore iterativo Gauss-Newton è CAN

$$\tilde{b} \xrightarrow{L} N[b^0; \frac{\sigma^2}{n} M^{-1}(b^0)] \tag{2.1.15}$$

Per campioni finiti è necessario iterare il processo di stima, ponendo \tilde{b} come stima iniziale in un secondo ciclo. Poiché non si è certi della convergenza, relativamente ad una generica iterazione (i) è necessario sostituire $\tilde{b}^{(i)}$ con

$$\tilde{b}_e^{(i)} = [\tilde{b}^{(i-1)} + \epsilon_i \tilde{\Delta}^{(i)}], \quad \epsilon_i \in (0,1) : [a'(\tilde{b}_e^{(i)}) a(\tilde{b}_e^{(i)})] < [a'(\tilde{b}^{(i)}) a(\tilde{b}^{(i)})] \tag{2.1.16}$$

Il procedimento si ferma nel momento in cui $\epsilon_i^* = 0$, a cui corrisponde $\tilde{\Delta}^* = 0$; l'espressione finale dello stimatore è

$$\tilde{b}^* = [\hat{b} + \sum_{i=1}^{i^*} \epsilon_i \tilde{\Delta}^{(i)}] \tag{2.1.17}$$

è importante osservare che, benché compaia \hat{b} , le proprietà di \tilde{b}^* non dipendono direttamente da \hat{b} . Ciò è vero in particolare per la normalità non avendo formulato ipotesi su \hat{b} .

Uno stimatore consistente per la varianza dei residui sarà

$$\tilde{\sigma}^{*2} = (n - k)^{-1} [\mathbf{a}' (\tilde{\mathbf{b}}^*) \mathbf{a} (\tilde{\mathbf{b}}^*)] \quad (2.1.18)$$

e per la matrice varianze-covarianze di $\tilde{\mathbf{b}}^*$, dalla (2.1.7) "iterata", avendo $\tilde{\Delta}^* = 0$

$$\tilde{\mathbf{D}}^* = \tilde{\sigma}^{*2} [\mathbf{V}' (\tilde{\mathbf{b}}^*) \mathbf{V} (\tilde{\mathbf{b}}^*)]^{-1} \quad (8). \quad (2.1.19)$$

2.2 Distribuzione asintotica di forme razionali

Si definisca $\tilde{\mathbf{b}}_1' = [\tilde{\mathbf{b}}_\delta', \tilde{\mathbf{b}}_\omega']$ un sottovettore di $\tilde{\mathbf{b}}$ formato dai primi $(r + s + 1)$ elementi, e $\mathbf{M}_1^{-1} (\mathbf{b}^0)$ una partizione corrispondente di $\mathbf{M}^{-1} (\mathbf{b}^0)$.

Il *gain* non è un parametro stimabile direttamente, e può essere inteso come funzione "razionale" (stocastica) di $\tilde{\mathbf{b}}_1$, dalla (1.11)

$$g(\tilde{\mathbf{b}}_1) = \frac{\tilde{\mathbf{b}}_\omega' \mathbf{i}}{1 + \tilde{\mathbf{b}}_\delta' \mathbf{i}} \quad ; \quad \tilde{g} = \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{\delta}} \quad (2.2.1)$$

il problema della sua distribuzione può essere affrontato in due fasi, come rapporto di forme lineari. La distribuzione asintotica dei due sottovettori è ottenibile come densità marginale

$$\tilde{\mathbf{b}}_\delta \xrightarrow{L} N \left[\mathbf{b}_\delta^0 ; \frac{\sigma^2}{n} \mathbf{M}_{11} \right] \quad (2.2.2)$$

avendo partizionato $\mathbf{M}_1^{-1} (\mathbf{b}^0) = \{\mathbf{M}_{ij}\}$, lo stesso risultato si ha per $\tilde{\mathbf{b}}_\omega$.

Data la stabilità della normale alle trasformazioni lineari

$$(\tilde{\mathbf{b}}_\delta' \mathbf{i} + 1) \xrightarrow{L} N \left[(\mathbf{i}' \mathbf{b}_\delta^0 + 1) ; \left(\frac{\sigma^2}{n} \mathbf{i}' \mathbf{M}_{11} \mathbf{i} \right) \right] ; \quad \tilde{\delta} \xrightarrow{L} N [\mu_\delta, \sigma_\delta^2] \quad (2.2.3)$$

analogamente per $\tilde{\mathbf{b}}_\omega' \mathbf{i}$ e $\tilde{\omega}$. Il coefficiente di correlazione asintotico tra le due forme lineari è

$$\rho = \frac{(\mathbf{i}' \mathbf{M}_{12} \mathbf{i})}{[(\mathbf{i}' \mathbf{M}_{11} \mathbf{i}) (\mathbf{i}' \mathbf{M}_{22} \mathbf{i})]^{1/2}} \quad (2.2.4)$$

e la PDF congiunta asintotica è normale bivariata

$$f(\tilde{\delta}, \tilde{\omega}) = (2\pi \sigma_\delta \sigma_\omega \sqrt{1 - \rho^2})^{-1} \exp \left[-\frac{1}{2(1 - \rho^2)} \left(\frac{\tilde{\delta}^2}{\sigma_\delta^2} - \frac{2\rho \tilde{\delta} \tilde{\omega}}{\sigma_\delta \sigma_\omega} + \frac{\tilde{\omega}^2}{\sigma_\omega^2} \right) \right] \quad (2.2.5)$$

La seconda fase è costituita dall'analisi della trasformazione $\tilde{g} = (\tilde{\omega}/\tilde{\delta})$, per la quale occorre applicare il "metodo delle distribuzioni", Mood-Graybill-Boes (74) pg. 187,

(8) Per la matrice var-cov il risultato segue dalla (IB), moltiplicando per (n^{-1}) ed essendo $\tilde{\mathbf{b}}^*$ consistente $[\mathbf{V}' (\tilde{\mathbf{b}}^*) \mathbf{V} (\tilde{\mathbf{b}}^*)]^{-1} \xrightarrow{P} \frac{1}{n} \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{b}^0)$.

$$f(\tilde{g}) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{\delta}| f(\tilde{\delta}; \tilde{g}, \tilde{\delta}) d\tilde{\delta}$$

Da cui, applicandola alla (2.2.5) ed integrando, è possibile ottenere, Papoulis (73) pg. 218,

$$f(\tilde{g}) = \frac{\sqrt{1-\rho^2} \sigma_{\delta} \sigma_{\omega} / \pi}{\sigma_{\omega}^2 (\tilde{g} - \rho \sigma_{\delta} / \sigma_{\omega})^2 + \sigma_{\delta}^2 (1 + \rho^2)}$$

e con le opportune sostituzioni, corrisponde ad una densità di *Cauchy* con parametri η, λ , (9)

$$f(\tilde{g}) = \left[\pi \lambda \left[1 + \left(\frac{\tilde{g} - \eta}{\lambda} \right)^2 \right] \right]^{-1} \tag{2.2.6}$$

$$\eta = \left(\rho \frac{\sigma_{\delta}}{\sigma_{\omega}} \right) = \frac{i' M_{12} i}{i' M_{22} i} ; \quad \lambda = \left(\sqrt{1-\rho^2} \frac{\sigma_{\delta}}{\sigma_{\omega}} \right) = \left[\frac{i' M_{11} i}{i' M_{22} i} - \left(\frac{i' M_{12} i}{i' M_{22} i} \right)^2 \right]^{1/2} \tag{2.2.7}$$

Stimatori $\tilde{\eta}^*, \tilde{\lambda}^*$, sono ricavabili dalla sola matrice var-cov \tilde{D}^* . Ora, data la stima finale $\tilde{g}^* = g(\tilde{b}_1^*)$ è possibile fare inferenza su di esso utilizzando una *Cauchy*?

Per rispondere occorre un richiamo sulla "natura" di questa PDF.

- 1) Non possiede né media, né varianza (finite), Rao (65) pg. 158.
- 2) La forma geometrica è campanulare e simmetrica, η, λ rappresentano parametri di locazione e di scala; ponendo ($\eta = 0$), ($\lambda = 1$) si ottiene la forma "standardizzata", corrispondente ad una *Student* con un grado di libertà, Johnson-Kotz (7) pg. 156,

$$[\pi (1 + \tilde{g})]^{-1} = t(1)$$

- 3) La media campionaria è uno stimatore inconsistente per η in quanto ha la stessa distribuzione di una singola osservazione, Kendall-Stuart (67) pg. 3. Va da sé che il teorema del limite centrale è inapplicabile al caso di campionamento da una *Cauchy*, la ragione è che viene meno l'ipotesi di varianza finita.

- 4) Stimatori consistenti per η, λ derivano in generale da "statistiche d'ordine", Bloch (66). Ma gli estimatori che ne risultano sono abbastanza complicati ed è difficile calcolarne la PDF.

- 5) In generale nella letteratura non sono state avanzate proposte di inferenza (Bibliografia Johnson-Kotz (70) pg. 164), a meno di non porre l'ipotesi ($\lambda = 1$), Kendall-Stuart (67) pg. 168.

Nel caso in esame si avrebbe un campione di una sola osservazione (\tilde{g}), l'impossibilità a fare inferenza è dovuta alla impossibilità di standardizzare

$$f\left(\frac{\tilde{g} - \eta}{\lambda}\right) = [\pi \lambda [1 + (\tilde{g} - \eta (1 + \lambda))^2]]^{-1} \neq t(1)$$

proprio perché η, λ , non sono media e varianza e la PDF non è normale.

(9) Questo risultato è ben noto solo per il rapporto di PDF esattamente normali, standardizzate ed indipendenti, Laha (59).

Nemmeno sotto $H_0 : (\eta = 0)$ si ha che $(\tilde{g}/\tilde{\lambda}), (\tilde{\eta}/\tilde{\lambda})$, seguono una $t(1)$, in quanto per definizione una Student è data dal rapporto tra una Normale ed una Chi-Quadro. Trovare la distribuzione di quei rapporti riproduce il problema iniziale, complicandolo.

Una via di uscita possibile può essere tentata approssimando la Cauchy ad una Normale, stabilendo le opportune corrispondenze tra le masse di probabilità. Da una tabella riportata da Johnson-Kotz (70) pg. 155, relativa al confronto tra Normale-standard e Cauchy-“standard”, le equivalenze probabilistiche di un test di ipotesi sulla significatività di (\tilde{g}) sono

<i>Test Unilaterale</i>	$\tilde{g} \geq 0$	95 %	Normale \equiv	88 %	Cauchy
		99 %	”	91 %	”
<i>Test Bilaterale</i>	$\tilde{g} \neq 0$	95 %	”	90 %	”
		99 %	”	92 %	”

Questi differenziali possono essere ridotti poiché in questo test viene utilizzata una Student e (\tilde{g}) ha una PDF-Cauchy solo asintoticamente, per n -finito ci si può attendere anche una corrispondenza più stretta.

Il problema del calcolo dei momenti del primo e secondo ordine del *gain* può essere risolto considerando $\tilde{\mathbf{b}}_1, g(\tilde{\mathbf{b}}_1)$ come sequenze di variabili casuali attraverso il seguente teorema, Fuller (76) pg. 205 in cui in $\tilde{\mathbf{b}}_1$ è implicito (n) .

Teorema (3) – Sia la sequenza di vettori stocastici a dimensione $k', \{\tilde{\mathbf{b}}_1\} \sim \{F_n(\tilde{\mathbf{b}}_1)\}$ e quest'ultima la sequenza corrispondente delle distribuzioni, sia inoltre $\{g_n(\tilde{\mathbf{b}}_1)\}$ una sequenza di trasformazioni a valori in \mathbf{R} e per $\epsilon \in (0, \infty)$ si definisca $\alpha = (1 + \epsilon)/\epsilon$.

Se per due interi positivi l, N_0 , e per un intervallo chiuso B , sono soddisfatte le seguenti ipotesi

- i) $\int |\tilde{\mathbf{b}}_1 - \mathbf{b}_1^0|^{\alpha l} dF_n(\tilde{\mathbf{b}}_1) = a_n^{\alpha l}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
- ii) $\int |g_n(\tilde{\mathbf{b}}_1)|^{1+\epsilon} dF_n(\tilde{\mathbf{b}}_1) = O(1)$
- iii) $g_n^{(i_1 \dots i_l)}(\tilde{\mathbf{b}}_1) = \left(\frac{\partial^l g_n(\tilde{\mathbf{b}}_1)}{\partial \tilde{b}_{i_1} \dots \partial \tilde{b}_{i_l}} \right) i = 1, 2, \dots, k'$ continua in $\tilde{\mathbf{b}}_1$ su $B, \forall n > N_0$
- iv) $\mathbf{b}_1^0 \in B$
- v) $\exists (K < \infty): |g_n^{(i_1 \dots i_l)}(\tilde{\mathbf{b}}_1)| \leq K \quad \forall \tilde{\mathbf{b}}_1 \in B; |g_n^{(i_1 \dots i_l)}(\mathbf{b}_1^0)| \leq k, b = 0, 1, \dots, l-1$
 $n > N_0$

Allora

$$\int g_n(\tilde{\mathbf{b}}_1) dF_n(\tilde{\mathbf{b}}_1) = g_n(\mathbf{b}_1^0) + \sum_{j=1}^{l-1} \frac{1}{j!} \int \left[\sum_{i_1=1}^{k'} \dots \sum_{i_b=1}^{k'} g_n^{(i_1 \dots i_b)}(\mathbf{b}_1^0) \prod_{k=1}^b (\tilde{b}_{i_k} - b_{i_k}^0) \right] dF_n(\tilde{\mathbf{b}}_1) + O(a_n^l) \quad (2.2.8)$$

Questo teorema non afferma solo che sviluppando in serie $g_n(\tilde{b}_1)$ nel punto (b_1^0) e considerandone il valore atteso si ottiene una *approssimazione lineare* "consistente" di $E[g_n(b_1)]$; esso consente anche di stabilire l'ordine (l) minimo di questo sviluppo.

Per individuare quest'ordine nel caso in esame si tratta di valutare *se e come* le ipotesi ($i \div v$) sono soddisfatte per processi TF stazionari.

Proposizione (3) — La sequenza di integrali nelle ipotesi (ii) del teorema (3) è uniformemente limitata solo a partire da un certo valore campionario e solo se il processo TF è stabile; cioè

$$(ii') \quad \int |g_n(\tilde{b}_1)|^{1+\epsilon} dF_n(\tilde{b}_1) = O_p(1) \quad \text{solo per } n > N_0, \quad b_1^0 \in B$$

Dimostrazione — Poiché $F_n(\tilde{b}_1)$ è una misura di probabilità e $g_n(\tilde{b}_1)$ una variabile casuale, la (ii) può anche essere scritta come

$$|g_n(\tilde{b}_1)|^{1+\epsilon} = O_p(1) \quad \text{e/o} \quad g_n(\tilde{b}_1) = O_p(1) \quad \text{per } n > N_0, \quad b_1^0 \in B$$

Ora se $b_1^0 \in B \subset B$ cioè la TF è stabile e b_1^0 non giace sul confine di B , essendo \tilde{b}_1 p -consistente, a partire da un certo valore campionario N_0 si avrà che $p\{\tilde{b}_1 \notin B\} \leq \epsilon$ $n > N_0$, con ϵ piccolo a piacere; per cui

$$(1 - \tilde{\delta}_1 B - \dots - \tilde{\delta}_r B^r) = 0 \quad \rightarrow \quad p\{|\tilde{r}_i| < 1\} \leq \epsilon \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$p\{|\tilde{\omega}_j| \geq M_\epsilon\} \leq \epsilon \quad j = 0, 1, \dots, s \quad n > N_0$$

dove (\tilde{r}_i) è la radice i -esima. Dalla (1.10) si può ottenere ricorsivamente la sequenza dei pesi-IRF \tilde{v}_k che risulta quindi ⁽¹⁰⁾

$$|\tilde{v}_k| = o_p(1) : \text{plim}_{n, k \rightarrow \infty} |\tilde{v}_k| = 0 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \sum_{k=0}^N |\tilde{v}_k| \right\}_N = O_p(1) \quad n > N_0$$

$$|\tilde{v}_k| = O_p(1) : p\{|\tilde{v}_k| \geq M_\epsilon\} \leq \epsilon \quad \forall k$$

Il risultato che interessa segue dal fatto che

$$|g_n(\tilde{b}_1)| = \left| \left(\sum_{j=1}^s \tilde{\omega}_j \right) / \left(1 + \sum_{i=1}^r \tilde{\delta}_i \right) \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\tilde{v}_k|$$

quindi

$$p\{|g_n(\tilde{b}_1)| \geq M\} \leq p\left\{ \left| \sum_{k=0}^{\infty} |\tilde{v}_k| \right| \geq M \right\} \quad n > N_0, \quad b_1^0 \in B$$

Le ultime tre rappresentano condizioni generali.

La (iii) è verificata per $B \subset B$ in quanto $g_n(\cdot)$ è assolutamente continua in \tilde{b}_1 ed uniformemente limitata su B per $n > N_0$.

La (iv) è soddisfatta se la TF è correttamente identificata ed il processo stocastico $\{z_t\}$ è adeguatamente stazionario.

⁽¹⁰⁾ Si noti che dietro al simbolo $(\tilde{\cdot})$, che denota una quantità stimata, è sempre implicito (n) .

Essendo $g_n(\tilde{\mathbf{b}}_1)$ una sequenza di variabili casuali, anche le derivate sono variabili casuali, la (v) va quindi riscritta come

$$(v') \quad |g_n^{(i_1, \dots, i_l)}(\tilde{\mathbf{b}}_1)| = O_p(1) \quad \text{su } B, \text{ per } n > N_0$$

ed è verificata per $B \subset B$.

La condizione (i) consente di definire direttamente l'ordine minimo dello sviluppo in serie.

Corollario (2) — Se $g_n(\tilde{\mathbf{b}}_1)$ è una funzione "gain" relativa alla stima di un processo TF stabile una rappresentazione "consistente" di $E[g_n(\tilde{\mathbf{b}}_1)]$ è

$$\int g_n(\tilde{\mathbf{b}}_1) dF_n(\tilde{\mathbf{b}}_1) = g(\mathbf{b}_1^0) + O(a_n) \quad n > N_0 \quad (2.2.9)$$

Dimostrazione — Stabilendo ($\epsilon = 1$) si ha ($\alpha = 2$), ed avendo $a_n = o(1) \Rightarrow a_n^{\alpha l} = o(1)$

$$\int |\tilde{\mathbf{b}}_1 - \mathbf{b}_1^0|^{2l} dF_n(\tilde{\mathbf{b}}_1) = o(1) \quad n > N_0 \quad \text{è verificata per } (l = 1)$$

infatti per ($l = 1$) l'integrale tende a $\left[\frac{\sigma^2}{n} M_1(\mathbf{b}^0) \right]$ che si annulla asintoticamente.

Dalla (2.2.8) con ($l = 1$) segue la (2.2.9). ▲

Dal corollario precedente, data la consistenza di $\tilde{\mathbf{b}}_1$ per \mathbf{b}_1^0 si ha

$$E[g_n(\tilde{\mathbf{b}}_1)] = g_n(\tilde{\mathbf{b}}_1) + O_p(a_n) \quad n > N_0$$

da cui uno stimatore consistente per la espressione lineare della media del gain è

$$\tilde{\mu}_g^* = g(\tilde{\mathbf{b}}_1^*) \quad (2.2.10)$$

per n -finito è necessario considerare uno sviluppo superiore.

Il calcolo della approssimazione lineare di $V[g_n(\tilde{\mathbf{b}}_1)]$ verrà impostato in termini più pragmatici, sviluppando $g_n(\tilde{\mathbf{b}}_1)$ in $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_1^0$

$$g_n(\tilde{\mathbf{b}}_1) = g(\mathbf{b}_1^0) + g'(\mathbf{b}_1^0)(\tilde{\mathbf{b}}_1 - \mathbf{b}_1^0) + \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{b}}_1 - \mathbf{b}_1^0)' G(\mathbf{b}_1^0)(\tilde{\mathbf{b}}_1 - \mathbf{b}_1^0) + \dots$$

$$g(\mathbf{b}_1^0) = \left. \frac{\partial g(\mathbf{b}_1)}{\partial b_i} \right|_{\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_1^0} \quad G(\mathbf{b}_1^0) = \left. \frac{\partial^2 g(\mathbf{b}_1)}{\partial b_i \partial b_j} \right|_{\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_1^0}$$

Portando la media asintotica al primo membro, moltiplicando per \sqrt{n} , elevando al quadrato e considerando il valore atteso si ha

$$E[\sqrt{n}(g_n(\tilde{\mathbf{b}}_1) - g(\mathbf{b}_1^0))]^2 = g'(\mathbf{b}_1^0) E[\sqrt{n}(\tilde{\mathbf{b}}_1 - \mathbf{b}_1^0)]^2 g(\mathbf{b}_1^0) +$$

$$+ g'(\mathbf{b}_1^0) \frac{1}{n} E[\sqrt{n}(\tilde{\mathbf{b}}_1 - \mathbf{b}_1^0)]^3 G(\mathbf{b}_1^0) +$$

$$+ \frac{1}{4} G'(\mathbf{b}_1^0) \frac{1}{n} E[\sqrt{n}(\tilde{\mathbf{b}}_1 - \mathbf{b}_1^0)]^4 G(\mathbf{b}_1^0) + \dots$$

Poiché $\{\tilde{b}_1\}$ è asintoticamente normale e corretto, i suoi momenti centrali di ordine dispari tendono ad annullarsi, e quelli di ordine pari tendono ad essere proporzionali alla matrice varianze-covarianze secondo la relazione

$$E [\sqrt{n} (\tilde{b}_1 - b_1^0)]^k = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k-1) [\sigma^2 M_1 (b^0)]^{k/2} \quad k\text{-pari}$$

che generalizza quella univariata $\mu_k = [1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k-1) \sigma^k]$.

Ponendo $(a_n = 1/\sqrt{n})$ la penultima espressione può essere scritta

$$E [\sqrt{n} (g_n(\tilde{b}_1) - g(b_1^0))]^2 = g'(b_1^0) E [\sqrt{n} (\tilde{b}_1 - b_1^0)' (\tilde{b}_1 - b_1^0) \sqrt{n}] g(b_1^0) + O(a_n)$$

e considerando il limite si ottiene la varianza asintotica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{n V [g_n(\tilde{b}_1)]\} = g'(b_1^0) \sigma^2 M_1^{-1}(b^0) g(b_1^0)$$

Uno stimatore consistente per la varianza del *gain* è

$$\tilde{\sigma}_g^{*2} = g'(\tilde{b}_1^*) \tilde{\sigma}^{*2} [V'(\tilde{b}^*) V(\tilde{b}^*)]^{-1} g(\tilde{b}_1^*) \quad (2.2.12)$$

In conclusione si può affermare che il *gain* (stimatore) ha una distribuzione asintotica approssimabile a

$$g(\tilde{b}_1) \approx N [g(b_1^0); g'(b_1^0) \frac{\sigma^2}{n} M_1^{-1}(b^0) g(b_1^0)].$$

III. ESEMPLIFICAZIONI

3.1 Modelli di uso frequente

Le IRF *non-lineari* maggiormente utilizzate nella esperienza empirica posseggono un limitato numero di parametri (2,3). Ciò accade non solo per il principio di *parsimonia* che si tende a perseguire, ma anche perché questi modelli sono in grado di esprimere profili dinamici dei pesi IRF diversificati e complessi anche con un limitato numero di parametri, Tav. 1.

Vengono calcolate ora le espressioni linearizzate in media e varianza di due particolari IRF: $V_1 [\tilde{\omega}_0 = (+), \tilde{\delta}_1 = (-)]$, $V_2 [\tilde{\omega}_0 = (+), \tilde{\delta}_1 = (-), \tilde{\delta}_2 = (-)]$ che si incontreranno nell'esempio empirico successivo ⁽¹¹⁾.

TAVOLA 1
IRF di uso frequente

(r, s, b)	IRF	Stabilità	Monotona	Alterna
(1, 0, b)	$V_1(B) = \frac{\omega_0 B^b}{1 - \delta_1 B}$	$-1 < \delta_1 < +1$	Espon. I° $0 < \delta_1 < 1$	Oscill. $-1 < \delta_1 < 0$
(2, 0, b)	$V_2(B) = \frac{\omega_0 B^b}{1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2}$	$\delta_2 + \delta_1 < 1$ $\delta_2 - \delta_1 < 1$ $-1 < \delta_2 < 1$	Espon. II° $(\delta_1^2 + 4\delta_2) > 0$	Period. $(\delta_1^2 + 4\delta_2) < 0$

⁽¹¹⁾ La struttura dei segni che compare nella espressione linearizzata, dipende dalla particolare struttura dei segni della IRF.

Sviluppando $\tilde{g}_1 = [\tilde{\omega}_0/(1 - \tilde{\delta}_1)]$ nel punto $[\omega_0^0 = (+), \delta_1^0 = (-)]$ fino alle derivate del secondo ordine e considerandone il valore atteso, si ottiene l'espressione lineare consistente di $E[\tilde{g}_1]$

$$E[\tilde{g}_1] \approx \frac{\omega_0^0}{(1 - \delta_1^0)} + \frac{1}{2(1 - \delta_1^0)^2} \text{cov}[\tilde{\omega}_0, \tilde{\delta}_1] + \frac{\omega_0^0}{(1 - \delta_1^0)^3} \text{var}[\tilde{\delta}_1] \quad (3.1.1)$$

Dallo sviluppo, portando a primo membro la media asintotica, considerando solo le derivate prime, elevando al quadrato, e considerando il valore atteso, si ottiene l'espressione lineare consistente di $V[\tilde{g}_1]$

$$V[\tilde{g}_1] \approx \frac{1}{(1 - \delta_1^0)^2} \text{var}[\tilde{\omega}_0] + \frac{2\omega_0^0}{(1 - \delta_1^0)^3} \text{cov}[\tilde{\omega}_0, \tilde{\delta}_1] + \frac{(\omega_0^0)^2}{(1 - \delta_1^0)^4} \text{var}[\tilde{\delta}_1] \quad (3.1.2)$$

Analogamente, sviluppando $\tilde{g}_2 = [\tilde{\omega}_0/(1 - \tilde{\delta}_1 - \tilde{\delta}_2)]$ in $[\omega_0^0 = (+), \delta_1^0 = (-), \delta_2^0 = (-)]$ e procedendo come nel caso precedente

$$E[\tilde{g}_2] \approx \frac{\omega_0^0}{(1 - \delta_1^0 - \delta_2^0)} + \frac{1}{(1 - \delta_1^0 - \delta_2^0)^2} (\text{cov}[\tilde{\omega}_0, \tilde{\delta}_1] + \text{cov}[\tilde{\omega}_0, \tilde{\delta}_2]) + \frac{\omega_0^0}{(1 - \delta_1^0 - \delta_2^0)^3} (\text{var}[\tilde{\delta}_1] + 2 \text{cov}[\tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2] + \text{var}[\tilde{\delta}_2]) \quad (3.1.3)$$

$$V[\tilde{g}_2] \approx \frac{1}{(1 - \delta_1^0 - \delta_2^0)^2} \text{var}[\tilde{\omega}_0] + \frac{2\omega_0^0}{(1 - \delta_1^0 - \delta_2^0)^3} (\text{cov}[\tilde{\omega}_0, \tilde{\delta}_1] + \text{cov}[\tilde{\omega}_0, \tilde{\delta}_2]) + \frac{(\omega_0^0)^2}{(1 - \delta_1^0 - \delta_2^0)^4} (\text{var}[\tilde{\delta}_1] + 2 \text{cov}[\tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2] + \text{var}[\tilde{\delta}_2]) \quad (3.1.4)$$

Per ottenere stimatori consistenti di questi momenti approssimati si sostituiscono i parametri incogniti $[(\omega_0^0, \delta_1^0, \delta_2^0); (\sigma_0^2, \sigma_1^2, \sigma_2^2); (\sigma_{01}, \sigma_{02}, \sigma_{12})]$ con le loro stime ($\tilde{\cdot}^*$).

3.2 Un esempio empirico

A titolo di esemplificazione numerica si è fatto un test sulla relazione di "feedback" tra prezzi e salari (spirale inflazionistica $p_t - w_t$) negli anni '70, definendo le variabili come

(P_t) = Indice dei prezzi al consumo per la intera collettività nazionale, base 1976.

(W_t) = Indice delle retribuzioni orarie minime contrattuali per gli operai del settore industria, al netto dei contributi famigliari, base 1975.

(N) = Dati mensili ISTAT nel periodo 1971.01-1980.12, $N = 120$.

Nella Tav. 2 sono riportate le tre coppie di modelli stimati descritti nella introduzione, stazionarietà (1.6), univariati (1.7), funzioni-trasferimento (1.9), e le principali statistiche.

TAVOLA 2
Modelli stimati e principali statistiche

Modelli stimati	RSS	df	SE	N°	Q	df	S	df
$(1-B)^2 P_t^{-.50} = p_t$.90777E-5	118	.2774E-3	118	24.97	20	35.36	20
$(1-B)(1-B^3) W_t^{+.25} = w_t$.020056	116	.013149	116	28.14	20	34.28	20
$p_t = (1+.499B) ep_t$ (.081)	.82517E-5	117	.26557E-3	119	22.85	19		
$w_t = (1+.780B^3) ew_t$ (.058)	.014059	115	.011057	119	16.11	19		
$p_t = (.0056)/(1-.610B) w_{t-1}$ (.0016) (.131) $+ (1 + .372B^2) ap_t$ (.090)	.72422E-5	112	.25429E-3	115	21.42	19	22.65	18
$w_t = (1.547)/(1-.589B-.977B^2) p_{t-1}$ (.669) (.027) (.026) $+ (1 + .807B^3) aw_t$ (.056)	.013058	112	.010798	116	14.50	19	26.53	17

Dalla Tav. 2 si può osservare che i modelli esposti soddisfano alle condizioni di stazionarietà-II, ed i segni dei coefficienti-IRF (in particolare $\tilde{\omega}_0^*$) sono coerenti con i comportamenti economici attesi. Nella Tav. 3 viene riportato uno schema di analisi della varianza (ANOVA), applicata ai modelli a serie storica ed in relazione alle statistiche disponibili dalla Tav. 2.

TAVOLA 3
Schema ANOVA per modelli TF (12)

Fonte	SS	df	Statistica F
TOTALE	$(z'z)$	$n_z = (N - d - sD)$	
\tilde{b} (TF)	$(z'z - a'a)$	$(n_z - n_a) + (r + s + 1 + p + q + P + Q)$	
\tilde{b}_2 (ARMA)	$(z'z - e'e)$	$(p + q + P + Q)$	
\tilde{b}_1 (IRF)	$(e'e - a'a)$	$(n_z - n_a) + (r + s + 1)$	$(e'e - a'a)/(n_z - n_a + r + s + 1)$
RESIDUI	$(a'a)$	$n_a - (r + s + 1 + p + q + P + Q)$	$a'a/(n_a - r - s - 1 - p - q - P - Q)$

(12) Il numero dei (df) della (SS) è condizionato dall'uso di procedure "backforecasting" nel calcolo dei residui attraverso $n_a =$ numero di residui stimati \hat{a}_t .

Il test-F⁽¹³⁾ è equivalente ad un test di causalità su $\Delta \tilde{\sigma}^2$; perché questo test, e lo stesso schema ANOVA, abbiano senso occorre che la struttura ARMA della TF sia la medesima dei modelli univariati. Ciò è sicuramente realizzato abolendo le discutibili procedure di "prewhitening" nella identificazione.

Nella Tav. 4 sono riportati i risultati empirici del test.

TAVOLA 4
Contributi esplicativi

Relazioni	$\Delta \tilde{\sigma}^2$	\tilde{F}^*	df	F.95	F.99
$P_t \longrightarrow W_t$	- 4.63 %	2.86	(3,112)	2.69	3.96
$W_t \longrightarrow P_t$	- 8.33 %	2.44	(5,112)	2.29	3.18

I valori sono moderatamente significativi, ed al 99% la significatività della relazione di "feedback" scompare, nonostante che le riduzioni delle varianze siano rilevanti.

Questo però non esclude che gli impatti moltiplicativi siano significativi, e che la relazione sia verificata sotto questo aspetto. In particolare affermazioni sulla natura inflazionistica delle variazioni salariali possono essere tratte solo dalla analisi di \tilde{g} e non di $\Delta \tilde{\sigma}^2$.

Nella Tav. 5 sono riportate le matrici Var-Cov stimate delle TF, necessarie per il calcolo delle medie e delle varianze dei *gain*.

TAVOLA 5
Matrici Var-Cov delle TF

$W_t \longrightarrow P_t$			$P_t \longrightarrow W_t$					
$\tilde{\theta}_1^*$.0081		$\tilde{\theta}_1^*$.003				
$\tilde{\delta}_1^*$.0007	.0172	$\tilde{\delta}_1^*$	-.5E-4	.0007			
$\tilde{\omega}_0^*$.23E-4	.15E-3	.25E-5	$\tilde{\delta}_2^*$	-.4E-5	.00035	.0007	
	$\tilde{\theta}_1^*$	$\tilde{\delta}_1^*$	$\tilde{\omega}_0^*$	$\tilde{\omega}_0^*$	-.5E-3	.005	.0104	.4476
				$\tilde{\theta}_1^*$	$\tilde{\delta}_1^*$	$\tilde{\delta}_2^*$	$\tilde{\omega}_0^*$	

(13) Si può dimostrare che questo test corrisponde al GLRT per il confronto tra varianze di due popolazioni normali indipendenti, e gode di proprietà ottimali (UMPT).

Nella Tav. 6 sono riportate le stime delle formule (3.1.1, 2, 3, 4).

TAVOLA 6
Contributi moltiplicativi (14)

Relazioni	\tilde{g}^*	$\tilde{\mu}_g^*$	$\tilde{\sigma}_g^*$	\tilde{t}_g^*	df	t.99
$P_t \longrightarrow W_t$	- 2.733	- 2.704	1.053	- 2.57	112	2.36
$W_t \longrightarrow P_t$.014	.016	.008	+ 2.00		

Anche la entità dell'impatto prodotto reciprocamente è scarsamente significativo (il livello effettivo di significatività è 92% in termini di densità di Cauchy).

Da ciò la conclusione che i determinanti di prezzi e salari siano soprattutto "interni", componenti di rigidità al ribasso, componenti autonome relative a contrattazione sindacale e speculazione commerciale.

Questo sembra essere confermato dal confronto tra modelli univariati e quelli di stazionarietà, Tav. 7, Tav. 8.

TAVOLA 7
Contributi auto-previsivi

Relazioni	$\Delta \tilde{\sigma}_t^2$	\tilde{F}^*	df	F.995
$P_t \longrightarrow P_t$	- 8.33 %	11.71	(1.117)	8.18
$W_t \longrightarrow W_t$	- 29.29 %	49.05	(1.115)	

TAVOLA 8
Contributi auto-moltiplicativi

Relazioni	$\tilde{g}^* = \tilde{\mu}_g^*$	$\tilde{\sigma}_g^*$	\tilde{t}_g^*	t.9995
$P_t \longrightarrow P_t$	1.499	.081	18.51	3.37
$W_t \longrightarrow W_t$	1.780	.058	30.69	

In questa ultima non è necessario porre corrispondenze con la Cauchy, poiché le IRF sono lineari (MA), e quindi i *gain* sono asintoticamente normali.

Università degli studi di Modena
Istituto Statistico-matematico

CARLO GRILLENZONI

(14) Il rapporto-t utilizza $\tilde{\mu}_g^*$ e non \tilde{g}^* ; poiché il *gain* viene stimato indirettamente è più corretto utilizzare uno stimatore che "tenga conto" delle var. e cov. dei singoli stimatori che lo compongono.

BIBLIOGRAFIA

- T. AMEMIYA, W.A. FULLER (1967), *A Comparative Study of Alternative Estimators in a Distributed Lag Model*, "Econometrica", 35, 509-529.
- T.W. ANDERSON (1959), *On Asymptotic Distributions of Estimates of Parameters of Stochastic Difference Equations*, "Ann. Math. Stat.", 30, 676-687.
- T.W. ANDERSON (1971), *The Statistical Analysis of Time Series*, Wiley, New York.
- D. BLOCH (1966), *A Note on the Estimation of the Location Parameter of the Cauchy Distribution*, "JASA", 61, 852-855.
- G.E.P. BOX, G.M. JENKINS (1970), *Time Series Analysis: forecasting and control*, Holden Day, San Francisco.
- S. CALLIARI, D. SARTORE (1980), *Le Relazioni di Causalità tra Moneta, Attività Economica e Prezzi*, "Ricerche Economiche", 34, 112-131, 163-185.
- F. CARLUCCI (1979), *Analisi di Causalità tra Moneta, Attività Economica e Prezzi*, "Note Economiche", 12, 74-113.
- H. CRAMER (1946), *Mathematical Methods of Statistics*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- P.J. DHRYMES, L.R. KLEIN, K. STEIGLITZ (1970), *Estimation of Distributed Lags*, "International Economic Review", 11, 235-250.
- N.R. DRAPER, H. SMITH (1966), *Applied Regression Analysis*, Wiley, New York.
- W. DUNSMUIR (1979), *A Central Limit Theorem for Parameter Estimation in Stationary Vector Time Series*, "Ann. of Stat.", 7, 490-506.
- E.L. FEIGE, D.K. PEARCE (1976), *Economically Rational Expectations*, "J. of Political Economy", 34, 499-522.
- D.G. FIEBIG (1980), *The Causal Relationship between Money and Income in Australia*, "Australian Economic Papers", 34, 78-90.
- W.A. FULLER (1976), *Introduction to Statistical Time Series*, Wiley, New York.
- E.J. GODOLPHIN (1977), *A Direct Representation for the Maximum Likelihood Estimator of a Gaussian Moving Average Process*, "Biometrika", 64, 375-384.
- C.W.J. GRANGER (1969), *Investigating Causal Relationships by Econometric Models nad Cross-Spectral Methods*, "Econometrica", 37, 378-385.
- E.J. HANNAN (1970), *Multiple Time Series*, Wiley, New York.
- E.J. HANNAN, D.F. NICHOLLS (1972), *The Estimation of Mixed Regression, Autoregression, Moving Average, and Distributed Lag Models*, "Econometrica", 40, 529-47.
- E.J. HANNAN (1975), *The Estimation of ARMA Models*, "Ann. of Stat.", 3, 975-81.
- D.M. HANSSENS (1980), *Bivariate Time Series Analysis of the Relationship between Advertising and Sales*, "Applied Economics", 12, 329-39.
- H.O. HARTLEY (1961), *The Gauss-Newton Method for the Fitting of Non-Linear Regression Functions by Least Squares*, "Technometrics", 3, 269-80.
- H.O. HARTLEY, A. BOOKER (1965), *Nonlinear Least Squares Estimation*, "Ann. Math. Stat.", 36, 638-50.
- L.D. HAUGH (1976), *Checking the Independence of Two Covariance Stationary Time Series*, "JASA", 71, 354-78.
- S.C. HILLMER, G.C. TIAO (1979), *Likelihood Function of Stationary Multiple ARMA Models*, "JASA", 74, 652-60.
- R.I. JENNRICH (1969), *Asymptotic Properties of Non-Linear Least Squares Estimators*, "Ann. Math. Stat.", 40, 633-43.
- N.L. JOHNSON, S. KOTZ (1970), *Continuos Univariate Distributions 1*, Houghton Mifflin Company, Boston.

- M.G. KENDALL, A. STUART (1967), *The Advanced Theory of Statistics 2*, Hafner, New York.
- R.G. LAHA (1959), *On the Laws of Cauchy and Gauss*, "Ann. Math. Stat.", 30, 1165-74.
- M.T. MALONEY, M.E. IRELAND (1980), *Fiscal Versus Monetary Policy*, "Journal of Econometrics", 13, 253-66.
- H.B. MANN, A. WALD (1943), *On the Statistical Treatment of Linear Stochastic Difference Equations*, "Econometrica", 11, 173-220.
- D.W. MARQUARDT (1963), *An Algorithm for Least-Squares Estimation of Non-Linear Parameters*, "SIAM", 11, 431-41.
- A.M. MOOD, F.A. GRAYBILL, D.C. BOES (1974), *Introduction to the Theory of Statistics*, McGraw-Hill Kogakusha, Tokyo.
- P. NEWBOLD (1974), *The Exact Likelihood Function of a Mixed AR-MA Process*, "Biometrika", 61, 423-26.
- D.F. NICHOLLS (1976), *The Efficient Estimation of Vector Linear Time Series Models*, "Biometrika", 63, 381-90.
- D.R. OSBORN (1977), *Exact and Approximate Maximum Likelihood Estimators for Vector MA Processes*, "JRSS-B", 39, 114-18.
- M. PAGANO (1974), *Estimation of Models of AR Signal Plus White Noise*, "Ann. of Stat.", 2, 99-108.
- A. PAPOULIS (1973), *Probabilità, Variabili Aleatorie e Processi Stocastici*, Boringhieri, Torino.
- M.S. PHADKE, G. KEDEM (1978), *Computation of the Exact Likelihood Function of Multivariate MA Models*, "Biometrika", 65, 511-20.
- D.A. PIERCE (1970), *A Duality between AR and MA Processes Concerning their Least Squares Parameter Estimates*, "Ann. Math. Stat.", 41, 422-26.
- D.A. PIERCE (1971), *Least Squares Estimation in the Regression Model with AR-MA Errors*, "Biometrika", 58, 299-312.
- D.A. PIERCE (1972), *Least Squares Estimation in Dynamic-Disturbance Time Series Models*, "Biometrika", 59, 73-78.
- D.A. PIERCE (1977), *Relationship – and the lack theorem – between Economic Time Series*, "JASA", 72, 11-22.
- D.S.G. POLLOCK (1979), *The Algebra of Econometrics*, Wiley, New York.
- C.R. RAO (1965), *Linear Statistical Inference and its Applications*, Wiley, New York.
- A.M. WALKER (1962), *Large Sample Estimation of Parameters for AR Processes with MA Residuals*, "Biometrika", 49, 117-31.
- P. WHITTLE (1961), *Gaussian Estimation in Stationary Time Series*, "Bull. Intern. Stat. Inst.", 33, 1-26.
- G.T. WILSON (1973), *The Estimation of Parameters in Multivariate Time Series Models*, "JRSSB", 35, 76-85.

SUMMARY

The Asymptotic Distribution of Gains in Non Linear Impulse-Response Functions

The necessity to define the distribution of gains' estimators in nonlinear impulse-response functions, practically rises from the research of multiplicative impact measures in the analysis of causality.

In a preliminary step there is the study of estimators' distribution of time series models' parameters, that in this work is developed in the context of nonlinear least squares estimation with stochastic regressors, the conclusion is of consistent and asymptotically normal estimates.

From this result it has demonstrated that nonlinear gains' estimators follow asymptotically a Cauchy density. The inference is developed approximating the Cauchy to a Gauss density and in calculating approximate linear expressions for mean and variance.

Finally it is proposed an empirical example that points out the need for statistical measures of significativity on variance reduction and estimated gains in the analysis of causality.

RÉSUMÉ

La Distribution Asymptotique des Gains dans des Fonctions de Transfer Non Lineaires

La nécessité de définir la distribution des estimateurs des gains pour des fonctions de transfer non lineaires, surgit concretement dans la recherche de mesures d'impact multiplicatives on analyse de la causalité.

Dans une première phase on cherche la distribution des estimateurs des modèles à series chronologiques du type ARMA-TF, que dans ce travail est affronté comme estimation non lineaire avec regresseurs stochastiques. On abouti aiusi à des estimateurs consistents et asymptotiquement normaux.

Sur la base de ce premier resultat on demontre que la distribution des gains non lineaires est asymptotiquement une Cauchy.

L'inference est effectuée on approximant cette Cauchy avec une distribution de Gauss et calculant après des expressions lineaires approximée pour la moyenne et la variance des gains.

Finalement on presente un exemple empirique qui confirme la nécessité de mesures de significativité dans l'analyse de la causalité.