# 2. L'ENERGIA MECCANICA

## 2.1 Il concetto di forza

La forza può essere definita come «azione reciproca tra corpi che ne altera lo stato di moto o li deforma: essa é caratterizzata da intensità direzione e verso». Si tratta dunque di una grandezza vettoriale. Esempi di **forza** sono il peso, l'elasticità, il magnetismo, le azioni tra corpi elettricamente carichi.

## 2.2 Il concetto di energia

Quello dell'energia è probabilmente il concetto fisico più importante che si incontra nello studio di tutta la scienza. Una sua chiara comprensione e un'esatta valutazione della sua importanza non fu raggiunta che nel 1847, quando il fisico tedesco Hermann Helmholtz (1821-1894) enunciò la *legge generale dell'energia*.
Per definire il concetto di energia è possibile partire da quello di lavoro salvo poi definire che cosa si intenda per lavoro.

Nel linguaggio scientifico la parola *lavoro* ha un significato più ristretto di quello che ha nel linguaggio comune. Per esempio per sollevare un oggetto per alcuni metri è necessario esercitare una forza tanto intensa da vincere la forza gravitazionale diretta verso il basso compiendo un certo lavoro, oppure, se si spinge una cassa su una superficie ruvida con una forza tale da vincere l'attrito e da spostarla di un certa distanza, si esegue anche in questo caso una certa quantità di lavoro. E su ciò tutti sono d'accordo. Ma un uomo fermo che tenga in mano una pesante valigia fa una grande fatica, ma, fisicamente parlando, non compie un lavoro meccanico. Se non c'è movimento non c'è lavoro.

Possiamo, come primo tentativo, definire il **lavoro** come il prodotto dell'intensità di una forza lungo la direzione dello spostamento per lo spostamento stesso:

$$Lavoro = forza \cdot spostamento \qquad (2.1)$$

Per andare un po' più a fondo riprendiamo il caso dell'oggetto sollevato dalla superficie terrestre. Consideriamo sia la forza che lo spostamento come vettori (caratterizzati da un modulo, una direzione ed un verso ben precisi): per tale motivo saranno indicati in seguito in grassetto. Dato che è la forza di gravità $\boldsymbol{F}_g$ a trattenere sulla superficie terrestre i corpi, per sollevarli si deve applicare una forza eguale e di verso contrario alla forza di gravità. Ora la forza di gravità dipende dalla massa $m$ del corpo e dall'accelerazione di gravità $\boldsymbol{g}$ ($g = 9.81\ m/s^2$) secondo quanto enunciato dalla seconda legge della dinamica $\boldsymbol{F}_g = m\ \boldsymbol{g}$. Se la massa del corpo è espressa in kilogrammi la forza risulta espressa in $(kg\ m)/s^2$ ovvero nell'unità di misura derivata detta *Newton*.
Se si solleva l'oggetto in verticale per una differenza di quota $d$, espressa in metri, il lavoro che ne risulta è $L = m \cdot g \cdot d$ [$(\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2)/\mathrm{s}^2$]. L'unità di misura derivata che corrisponde a questa

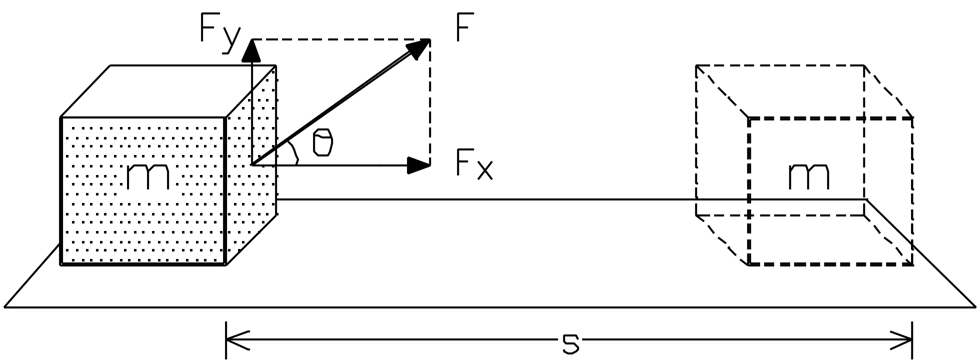
relazione, e che si esprime nelle unità di misura (kg·m$^2$)/s$^2$, è detta *Joule* in onore di James Prescott Joule (1818-1889), il fisico i cui studi chiarirono i concetti di lavoro e energia.

Nell'esempio considerato ci si è limitati al caso in cui l'oggetto venga sollevato (cioè spostato verticalmente) operando contro la forza di gravità. In questo caso la forza applicata (che ha modulo e direzione uguali alla forza di gravità e verso contrario) ha la *medesima direzione dello spostamento* e la relazione (2.1) ha un chiaro significato. E' possibile però applicare agli oggetti anche forze aventi direzione diversa da quella in cui avviene lo spostamento. Per esempio spingendo un'auto si rileva immediatamente come varia lo sforzo secondo l'angolo che si assume con il corpo e/o con le braccia. La parte di una forza che compie lavoro in seguito ad uno spostamento è la sua componente lungo la direzione dello spostamento.
Consideriamo il corpo di massa *m* della figura seguente: la forza ***F*** viene applicata al suo baricentro per trascinarlo lungo un piano facendogli compiere uno spostamento ***s***. La direzione della forza forma con la direzione del moto un angolo *q.* La forza può essere considerata come la somma vettoriale di due forze indipendenti le componenti x e y rispettivamente lungo la direzione del moto e in direzione perpendicolare a questa.

$$F_x = F \cos q \qquad\qquad F_y = F \sin q \qquad (2.2)$$

La componente $F_x$ è diretta lungo lo spostamento perciò è la sola a compiere un lavoro, il quale sarà pari a:

$$L = F_x \; s = F \cos q \;\; s \qquad (2.3)$$




Ricordando il significato di **prodotto scalare** di due vettori possiamo scrivere in termini più generali (in grassetto i vettori):

$$L = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} \qquad (2.4)$$

Che ribadisce ancora una volta come il lavoro compiuto da una forza che provoca uno spostamento si ottenga considerando la proiezione del vettore rappresentante la forza nella direzione del moto.
Una caratteristica importante del lavoro compiuto da una forza è la rapidità con cui esso è stato eseguito, questo concetto viene espresso in termini fisici dalla grandezza fisica che va

sotto il nome di **potenza**. Se durante un intervallo di tempo $\Delta\tau$ è eseguito il lavoro L, la potenza media impiegata è:

$$\overline{P} = \frac{L}{\Delta t} \tag{2.5}$$

passando a considerare intervalli di tempo infinitesimi è possibile definire la potenza istantanea come:

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta L}{\Delta t} \tag{2.6}$$

L'unità di misura corrispondente avrà le dimensioni di un lavoro diviso un tempo e quindi, utilizzando le rispettive unità nel SI, J/s. Essa prende il nome di Watt (simbolo W) in onore di James Watt l'ingegnere scozzese le cui ricerche permisero che il motore a vapore divenisse di uso pratico.
Definito in questo modo il lavoro possiamo definire l'**energia** come la possibilità di compiere un lavoro: prima abbiamo energia, poi avremo del lavoro svolto.
La quantità di energia usata durante una certa operazione o un certo processo può essere espressa sotto forma del prodotto (potenza) x (tempo) per esempio la quantità di energia assorbita da un motore elettrico della potenza di un 1 kW che funziona per un'ora è di 1kWh (Kilowattora), allo stesso modo la quantità di energia generata da una centrale elettrica di 1000 MW in un'ora di funzionamento è di 1000 MWh (Megawattora).
Nei prossimi paragrafi prenderemo in considerazione alcune forme di energia molto importanti.

### 2.3 Energia cinetica

Si consideri ora una forza $F$ che agisca su una massa $m$ in moto facendone variare la velocità $v$ *con* un'accelerazione $a$. Se tale forza ha la stessa direzione del moto si può scrivere:

$$F = ma = m\frac{dv}{dt} \tag{2.7}$$

e il lavoro svolto da tale forza lungo lo spostamento elementare $ds$ vale:

$$dL = Fds = m\frac{dv}{dt}ds = mdv\frac{ds}{dt} \tag{2.8}$$

Poiché per definizione $ds/dt$ corrisponde alla velocità istantanea $v$ del corpo si ha anche:

$$L = mvdv \tag{2.9}$$

e pertanto il lavoro svolto dalla forza lungo lo spostamento da A a B è:

$$L = \int_A^B mvdv = m\int_A^B vdv = \frac{1}{2}m(v_B{}^2 - v_A{}^2) \qquad (2.10)$$

Da questa equazione si osserva che il lavoro compiuto dipende unicamente dai valori assunti dalla velocità all'inizio e alla fine della traiettoria o più precisamente dal valore che nel punto di inizio e fine della traiettoria assume il prodotto $m\, v^2/\, 2$.

**Essendo stato eseguito sul corpo un lavoro esso ha acquistato una quantità di energia pari a tale lavoro. Questa energia che un corpo possiede in virtù del suo moto è detta *energia cinetica $E_k$* e può essere espressa dalla relazione:**

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \qquad (2.11)$$

**2.4 Energia di posizione o potenziale gravitazionale**

Esaminiamo ora l'energia associata all'attrazione gravitazionale agente fra la terra e altri oggetti in prossimità della sua superficie. Consideriamo il sistema formato dalla terra e da un oggetto di massa *m* e supponiamo ora di sollevare tale oggetto, inizialmente in quiete, fino a una posizione situata ad una certa altezza h al di sopra della posizione iniziale e di lasciare l'oggetto di nuovo fermo. E' chiaro che è stato eseguito del lavoro contro la forza di gravità *m**g***, ma non è avvenuta una variazione di velocità e perciò esso non ha immagazzinato energia cinetica. L'oggetto, però, possiede un'energia in virtù della sua posizione come è facile accertare lasciandolo cadere fino alla sua posizione iniziale.

Dato che, in questo caso, l'accelerazione è uguale a:

a = g = dv/dτ -------> da cui si ricava l'intervallo temporale infinitesimo: dτ = dv / g

mentre la velocità è:

v = dh/dτ ------> da cui si ricava la variazione di quota infinitesima: dh = v dτ = v dv / g

integrando fra istante iniziale e istante finale si ottiene la variazione di quota totale:

$$h = \int v\, dv / g = \frac{1}{g}\int vdv = \frac{1}{g}\ \frac{1}{2}\ v^2$$

quindi la velocità finale (quella iniziale è uguale a zero):

$$v^2 = 2ah \text{ -------> } v = \sqrt{2gh}$$

Pertanto, dopo essere caduto di una distanza h l'oggetto avrà acquistato una velocità *v* pari a:

$$v = \sqrt{2gh}$$

e la sua energia cinetica sarà:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(2gh) = mgh$$

L'oggetto prima di cadere ha quindi una quantità di energia potenziale o di posizione *mgh* che ha la possibilità di trasformarsi, cadendo, in energia cinetica.

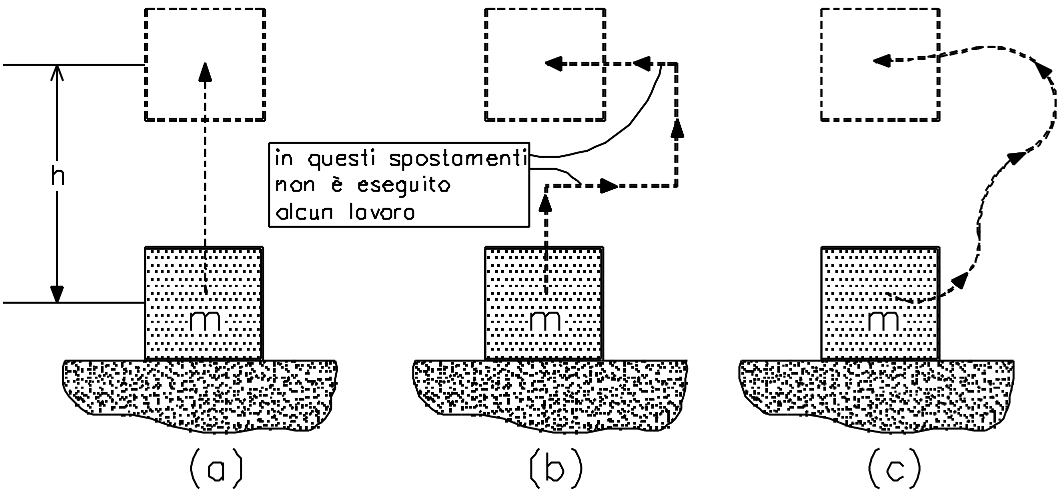
**Il lavoro eseguito contro la forza di gravità per sollevare un oggetto è in esso immagazzinato sotto forma di energia. Questa energia che il corpo possiede in virtù della sua posizione è chiamata energia potenziale del corpo $E_p$ e può essere espressa dalla relazione:**

$$E_p = mgh \qquad (2.12)$$

**in cui h è l'altezza della posizione del corpo rispetto ad una quota fissata come riferimento, scelta in maniera arbitraria.**

### 2.5 Forze conservative

E' importante a questo punto notare come, essendo la forza gravitazionale diretta sempre verticalmente verso il basso, non occorre (in assenza di attrito) alcuna forza, e quindi lavoro, per spostare un oggetto in direzione orizzontale con velocità costante.




Ne consegue che, in assenza di attriti, se si scelgono due percorsi differenti per sollevare un oggetto all'altezza *h* come in figura, la quantità di lavoro è la stessa cioè *mgh*. Ogni spostamento arbitrario può essere scomposto in due componenti una orizzontale e una

verticale: solo il moto verticale richiede che si esegua lavoro, il moto orizzontale non richiede alcun lavoro.
Perciò il moto di un oggetto da una posizione ad un'altra contro la *forza di gravità* che è *costante in modulo e direzione* richiede la stessa quantità di lavoro qualunque sia il percorso seguito. Si vede allora, in altre parole, che il *lavoro compiuto da tale forza dipende unicamente dalle posizioni iniziali e finali* che caratterizzano lo spostamento. Da notare che se il corpo viene spostato lungo una *traiettoria chiusa* su se stessa (ovvero *se la posizione iniziale e finale che descrivono lo spostamento coincidono*) *il lavoro compiuto dalla forza è nullo*.

**Una forza che sia caratterizzata dalla proprietà secondo cui la quantità di lavoro eseguito contro di essa dipende solo dalla posizione iniziale e finale dell'oggetto spostato è detta *forza conservativa*. La forza gravitazionale che esiste in prossimità della superficie terrestre è manifestamente una forza conservativa**

## 2.6 Conservazione dell'energia meccanica

L'energia cinetica e l'energia potenziale sono dunque due forme in cui si può presentare l'energia di un corpo. Durante il moto del corpo queste due forme di energia, in generale, variano da istante a istante: l'energia cinetica $E_k$ varia se varia la velocità del corpo, l'energia potenziale $E_p$ varia se varia la posizione del corpo. Esiste però una legge fondamentale della fisica, detta **legge di conservazione dell'energia meccanica**, la quale stabilisce che *se le forze che agiscono sul corpo considerato sono tutte consevative, la somma dell'energia cinetica e di quella potenziale si mantiene costante durante il moto*, cioè:

$$E_k + E_p = E = costante \qquad (2.13)$$

La costante $E$ ha il nome di energia meccanica del corpo. Questa legge ha una validità generale a condizione che sul corpo non agiscano forze dissipative, come l'attrito e la resistenza del mezzo in cui il corpo si muove. Ci proponiamo ora di verificare questa legge in un caso particolare: il moto di caduta di un corpo.

Si consideri un corpo di massa $m$ sottoposto alla forza gravitazionale (*forza conservativa*) che si trovi nella posizione iniziale A individuata dalla quota $h_A$ rispetto ad un piano di riferimento. Si consideri che inizialmente il corpo sia fermo in tale posizione. Come è stato già detto se si lascia cadere liberamente il corpo si osserverà che esso ridurrà via via la sua quota ed aumenterà via via la sua velocità. Mentre cade liberamente il corpo è sottoposto ad una forza $F = m\ g$ che gli imprime un *moto uniformemente accelerato* per il quale, dopo un certo tempo $\Delta\tau$, la velocità è variata di $\Delta v = g\ \Delta\tau$. Tenuto conto che la velocità iniziale era nulla, nel tempo $\Delta\tau$ il corpo avrà percorso lo spostamento d = $h_A - h_b$ .

Infatti, essendo l'accelerazione pari all'accelerazione di gravità:

a = g = dv/dτ -----> da cui si ottiene la variazione infinitesima di velocità: dv = g dτ integrando tra gli istanti iniziale e finale si ottiene la velocità finale:

$$\int dv = g\int dt \quad \text{----->} \quad v = g\,\tau$$

siccome la velocità istantanea é anche uguale a:

$v = dh/d\tau$ -----> la variazione infinitesima di quota sarà: $dh = v\,d\tau = g\,\tau\,d\tau$

integrando tra gli istanti iniziale e finale si ottiene la variazione di quota totale:

$$d = h = g\int t\,dt = g\,\frac{1}{2}\,\tau^2$$

pertanto:

$$d = g\frac{\Delta t^2}{2} \qquad (2.14)$$

Il lavoro prodotto dalla forza *F* durante lo spostamento *d* è allora pari a:

$$L = Fd = mg^2\frac{\Delta t^2}{2} \qquad (2.15)$$

che (visto che $\Delta v = a\,\Delta\tau = g\,\Delta\tau$) corrisponde a scrivere:

$$L = m\frac{\Delta v^2}{2} \qquad (2.16)$$

Si riconosce pertanto che tale lavoro corrisponde alla variazione di energia cinetica $\Delta E_k$ che il corpo ha conseguito tra l'inizio e la fine dello spostamento *d*.

D'altra parte la sua energia di posizione, che inizialmente era $mgh_A$, si sarà contemporaneamente ridotta della quantità:

$$\Delta E_p = mgd \qquad (2.17)$$

Sostituendo il valore di *d* espresso in precedenza si ottiene allora:

$$\Delta E_p = mg^2\frac{\Delta t^2}{2} = m\frac{\Delta v^2}{2} = \Delta E_k \qquad (2.18)$$

Si vede, pertanto, che in un campo conservativo la diminuzione dell'energia di posizione equivale ad un aumento dell'energia cinetica del corpo.
Se pertanto si chiama *energia meccanica* la somma di queste due forme di energia si può affermare che **in un campo conservativo l'*energia meccanica si conserva***.
In altre parole in un campo conservativo l'energia meccanica di un corpo permane invariata sebbene si possa liberamente trasformare da una all'altra delle suddette forme cioè da

energia cinetica in energia di posizione e viceversa.

### 2.7 Campi di forze conservativi

Una regione dello spazio in cui agisca un determinato sistema di forze viene detto *campo* di tali forze. In ogni punto di tale regione è definita la forza la cui intensità è funzione solo della posizione considerata. Quando la forza che lo caratterizza è conservativa il campo viene detto *conservativo* ed il lavoro per spostare un corpo al suo interno non dipende dal percorso effettuato ma solamente dalle posizioni iniziali e finali. Tre esempi di campi di forza conservativi sono:

1) *il campo della forza peso*, cioé una regione dello spazio vicina alla superficie terrestre tale che l'accelerazione di gravitá possa considerarsi costante in tutti i suoi punti: un corpo di massa $m$ é soggetto alla forza $m\mathbf{g}$;

2) *il campo della forza gravitazionale terrestre (o di ogni altro corpo celeste),* in ogni punto dello spazio intorno alla terra un corpo di massa m é soggetto ad una forza diretta verso il centro della terra di intensitá $Gm_Tm/r^2$ dove $G$ é la costante di gravitazione universale, $m_T$ é la massa della terra $r^2$ la distanza del corpo dal centro della terra;

3) *il campo elettrico generato da una carica puntiforme Q:* una seconda carica $q$ é soggetta ad una forza diretta verso la prima di intensitá proporzionale a $Qq/r^2$ (Legge di Coulomb) con $r^2$ la distanza delle due cariche;

Allo stesso modo di quanto fatto per la forza gravitazionale in ogni campo conservativo é possibile definire una *energia potenziale* funzione della posizione dei corpi all'interno del campo. Il *lavor*o effettuato dalle forze di un campo conservativo (o contro le forze di un campo conservativo) per ottenere lo spostamento di un corpo all'interno del campo stesso *sarà pari alla corrispondente variazione dell'energia potenziale o energia di posizione*.

**All'interno di un campo conservativo l'*energia potenziale* è una funzione delle coordinate spaziali tale che la differenza tra i suoi valori iniziale e finale è uguale al lavoro compiuto su di un corpo per spostarlo dalla posizione iniziale alla posizione finale.**