

## 10. L'ARIA UMIDA

### 10.1 Premessa

Come è già stato ampiamente trattato nel sesto capitolo, il comportamento di un sistema gassoso che può essere considerato gas ideale viene descritto dall'equazione di stato:

$$p \cdot v = \frac{R^*}{M} \cdot T \quad (10.1)$$

in cui  $R^* = 8314,3 \text{ J/(kmol}\cdot\text{K)}$  è la costante universale dei gas ed  $M$  la massa molare della specie chimica considerata. Un tale comportamento può essere assunto valido, con approssimazione accettabile per i calcoli tecnici, per un gas reale che si trovi in uno stato sufficientemente disperso (bassa densità, cioè bassa pressione e/o elevata temperatura).

Se si considera una miscela omogenea di  $N$  specie gassose che non reagiscono chimicamente tra loro e si mantengono in un rapporto fisso di massa, il fluido termodinamico che esse costituiscono è soggetto alla Regola delle Fasi di Gibbs (Varianza = Componenti – fasi + 2). Essendo  $N$  il numero di componenti e 1 il numero delle fasi (solo quella gassosa) lo stato del sistema è determinato quando si conoscono  $(N + 1)$  coordinate termodinamiche intensive indipendenti, tra le quali devono essere considerate anche quelle che ne descrivono la composizione.

Se la miscela si trova in stati termodinamici tali che il volume effettivamente occupato dalle molecole (covolume) sia trascurabile rispetto al volume totale a disposizione, che la distanza media tra le molecole sia tale da rendere irrilevante le possibilità di urto tra particelle e trascurabili le forze di attrazione reciproca, allora l'energia interna è legata alla sola energia cinetica media statistica delle molecole. In tale situazione la miscela gassosa si comporterà come gas ideale e vale la:

legge di **Dalton - Gibbs** secondo la quale:

- *la pressione totale  $p$*  della miscela è pari alla somma delle *pressioni parziali  $p_i$*  che ciascun componente eserciterebbe se, da solo, occupasse l'intero volume  $V$  occupato dalla miscela alla stessa temperatura  $T$ ;
- *l'energia interna totale  $U$*  è la somma delle  $N$  energie interne  $U_i$  di ciascun componente, considerato come se occupasse da solo il volume totale  $V$  alla temperatura  $T$  della miscela.

Ovvero:

$$p = \sum_{i=1}^N p_i \quad (10.2)$$

$$U = \sum_{i=1}^N U_i \quad (10.3)$$

Per la miscela così ipotizzata, ciascun gas, se considerato nell'intero volume  $V$  alla temperatura  $T$  si comporta come gas ideale. Si parla allora di **miscela ideale di gas ideali** per la quale varrà come equazione di stato la relazione (10.1) considerata nella forma:

$$p \cdot V = n \cdot R^* \cdot T \quad (10.4)$$

in cui  $n$  rappresenta il numero di moli totali componenti la miscela.

In una miscela di questo tipo indicato con  $n_i$  il numero di moli del componente  $i$ -esimo definiamo **frazione molare del componente  $i$ -esimo** il rapporto:

$$x_i = n_i / n \quad (10.5a)$$

Risulta ovviamente:

$$\sum_{i=1}^N x_i = 1$$

ed anche:

$$x_i = \frac{p_i}{p} \quad (10.5b)$$

Quest'ultima relazione è facilmente dimostrabile in quanto:

$$n_i = \frac{p_i \cdot V}{R^* \cdot T} \rightarrow \frac{n_i}{n} = \frac{p_i \cdot V}{R^* \cdot T} \cdot \frac{R^* \cdot T}{p \cdot V} = \frac{p_i}{p}$$

La massa totale della miscela è calcolata come:

$$m = \sum_{i=1}^N m_i = \sum_{i=1}^N n_i M_i \quad (10.6)$$

in cui:  $M_i$  = massa molecolare del componente  $i$ -esimo [kg/ kmole];  
 $m_i$  = massa del componente  $i$ -esimo [kg]

La **massa molare equivalente** o media,  **$M_m$ , della miscela** risulta pari al rapporto tra la massa  $m$  della miscela ed il numero di moli totali  $n$  componenti la stessa:

$$M_m = \frac{m}{n} = \sum_{i=1}^N x_i \cdot M_i \quad (10.7)$$

Si parla di massa molare equivalente perché ovviamente non esiste una molecola della miscela.

La relazione (10.4) può essere resa come:

$$p \cdot V = n \cdot R^* \cdot T = m \cdot \frac{R^*}{M_m} \cdot T = m \cdot R_m \cdot T \quad (10.8)$$

cioè:  $p v = R_m T$

dove  $R_m$  sarebbe **la costante particolare del gas per quella miscela**, definita in modo analogo alla costante particolare del gas per il componente puro:  $R_m = R^* / M_m$ .

Risulta anche:

$$R_m = \frac{R^*}{m} \cdot n = \frac{R^*}{m} \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{M_i} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{m} \frac{R^*}{M_i} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{m} \cdot R_i$$

Essendo  $R_i$  la costante particolare del componente i-esimo ed  $m_i/m$  la sua **frazione di massa** nella miscela.

Sempre con riferimento ad una miscela ideale di gas ideali si consideri per ogni gas componente il volume  $V_i$  che esso occuperebbe se fosse da solo alla pressione totale  $p$ , ed alla temperatura  $T$  della miscela (**volume parziale** del componente i-esimo della miscela).

Risulta:

$$V = n R^* T / p \quad ; \quad V_i = n_i R^* T / p$$

quindi: 
$$V = \sum_{i=1}^N V_i \quad \text{e} \quad V_i = x_i V$$

quanto sopra costituisce la:

**legge di Amagat - Leduc o dei volumi additivi:** il volume totale di una miscela ideale di gas ideali è la somma dei volumi parziali  $V_i$  che ciascun componente occuperebbe se si trovasse da solo alla pressione totale  $p$  ed alla temperatura  $T$  della miscela.

La composizione di una miscela di gas può essere espressa specificando le frazioni volumetriche ( $V_i/V$ ) di ciascun componente, ma per una miscela ideale di gas ideali le frazioni volumetriche coincidono con le frazioni molari. In tal caso risulta pertanto che:

$$x_i = V_i / V \quad (10.9)$$

Note le masse molecolari di ciascun gas, dall'analisi in termini di frazioni volumetriche si può passare all'analisi massica (in termini di frazioni di massa  $m_i/m$ ) nel seguente modo:

$$\frac{m_i}{m} = \frac{n_i \cdot M_i}{\sum_{i=1}^N (n_i \cdot M_i)} \quad \frac{m_i}{m} = \frac{n_i \cdot M_i / n}{\sum_{i=1}^N (n_i \cdot M_i) / n} = \frac{x_i \cdot M_i}{\sum_{i=1}^N (x_i \cdot M_i)} = \frac{(V_i / V) \cdot M_i}{\sum_{i=1}^N (V_i / V) \cdot M_i}$$

Riguardo le grandezze energetiche si può scrivere:

$$S = \sum_{i=1}^N S_i = \sum_{i=1}^N (m_i \cdot s_i) \quad ; \quad s = \frac{S}{m} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{m_i}{m} \cdot s_i \right)$$

ed anche:

$$H = U + pV = \sum_{i=1}^N U_i + V \sum_{i=1}^N p_i = \sum_{i=1}^N (U_i + p_i \cdot V)$$

$$H = \sum_{i=1}^N H_i = \sum_{i=1}^N (m_i \cdot h_i) \quad ; \quad h = \frac{H}{m} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{m_i}{m} \cdot h_i \right)$$

Riguardo il calcolo dei calori specifici, facendo ricorso alla loro definizione:

$$c_v = \left( \frac{du}{dT} \right)_{v,ni} \quad ; \quad c_p = \left( \frac{dh}{dT} \right)_{p,ni}$$

si ricava:

$$c_v = d \left[ \sum_{i=1}^N \left( \frac{m_i}{m} \cdot u_i \right) \right]_{v,ni} / dT = \sum_{i=1}^N \left( \frac{m_i}{m} \cdot c_{vi} \right)$$

$$c_p = d \left[ \sum_{i=1}^N \left( \frac{m_i}{m} \cdot h_i \right) \right]_{p,ni} / dT = \sum_{i=1}^N \left( \frac{m_i}{m} \cdot c_{pi} \right)$$

Tutti i valori molari delle grandezze relative alla miscela sono legati ai corrispondenti valori molari parziali delle specie gassose componenti:

energia interna molare:  $u_m = \sum_{i=1}^N (x_i \cdot u_i)$

entalpia molare:  $h_m = \sum_{i=1}^N (x_i \cdot h_i)$

entropia molare:  $s_m = \sum_{i=1}^N (x_i \cdot s_i)$

calore specifico molare a p costante:  $c_{pm} = \sum_{i=1}^N (x_i \cdot c_{pi})$

calore specifico molare a v costante:  $c_{vm} = \sum_{i=1}^N (x_i \cdot c_{vi})$

per miscele gassose che seguono la legge di Dalton - Gibbs è così possibile ricavare i valori delle grandezze termodinamiche dai corrispondenti valori parziali relativi ai singoli gas-componenti, nota che sia la composizione della miscela in termini di massa ( $m_i / m$ ) o di frazioni molari ( $x_i$ ).

Per le miscele di gas valgono tutte le relazioni già ricavate per i gas ideali. Una trasformazione isoentropica (adiabatica) per una miscela ideale di gas ideali è ancora rappresentata dalla:

$$p v^k = \text{cost}$$

dove k deve però essere calcolato come segue:

$$k = \frac{c_p}{c_v} = \frac{\sum_{i=1}^N (m_i \cdot c_{pi})}{\sum_{i=1}^N (m_i \cdot c_{vi})}$$

Una miscela gassosa multicomponente, per la quale si possa assumere il comportamento da gas ideale, può contenere una specie molecolare che, nel corso di una determinata trasformazione, si separa dallo stato di aggregazione gassoso condensando. Si parla in tal caso di **miscela di gas e di vapore condensabile**.

Quando la solubilità della specie considerata della fase aeriforme nella fase condensata è modesta, si stabilisce un equilibrio di fase indipendentemente dalla presenza di altri gas.

Il componente considerato non si separa in fase liquida fintanto che la sua pressione parziale di vapore  $p_i$  si mantiene minore della pressione di saturazione  $p_s(T)$  che il componente considerato ha alla temperatura della miscela.

La massima quantità di vapore del componente condensabile che può essere contenuta in fase aeriforme nella miscela gassosa è quella che si raggiunge quando il componente possiede pressione parziale pari alla **pressione di saturazione** alla temperatura T della miscela. Oltre tale pressione si ha separazione sotto forma di fase liquida della quantità eccedente di quel componente. Questo per temperature comprese tra la temperatura del punto triplo e la temperatura critica. Si ha invece separazione in forma di fase solida se la temperatura è inferiore a quella del punto triplo.

In presenza di fase condensata ed in condizioni di equilibrio la miscela si dice **saturo** nel componente vapore.

Il componente condensabile si può considerare nello stato di vapore surriscaldato quando nella fase aeriforme la sua pressione parziale è inferiore alla pressione di saturazione corrispondente alla temperatura della miscela, e nello stato di vapore saturo secco se si è in presenza di fase condensata separata. In quest'ultimo caso si può considerare che il

componente condensabile sia in equilibrio di fase, anche se in realtà la sua fase condensata è sottoraffreddata (o «in pressione»), in quanto sottoposta alla pressione totale della miscela che è maggiore della sua pressione di saturazione a quella temperatura.

## 10.2 Psicrometria

Con le considerazioni fatte nel paragrafo precedente si può analizzare una miscela di gas e vapori molto interessante dal punto di vista applicativo nel campo della fisica tecnica e della climatizzazione: l'aria che costituisce la troposfera ed in cui viviamo. Questa è infatti una miscela di vapore acqueo, in quantità variabile, e di una serie di gas, incondensabili nelle condizioni ambientali standard, le cui proporzioni reciproche sono costanti; la Tabella 10.1 presenta i principali costituenti e le loro concentrazioni volumetriche.

Per comodità si sceglie di considerare tutti i componenti dell'aria, eccetto il vapore, come un unico pseudo-componente gassoso indistinto a cui si suole dare il nome di **aria secca** e di pensare l'aria, detta di solito **aria umida**, come **una miscela di aria secca e vapore d'acqua**. La psicrometria studia le proprietà dell'aria umida.

**Tabella 10.1.** Composizione dell'aria atmosferica secca  
[Harrison - *Humidity and Moisture*]

Costituente	Concentrazione volumetrica (%)	Massa molecolare [kg/ kmol]
Azoto (N <sub>2</sub> )	78,084	28,0134
Ossigeno (O <sub>2</sub> )	20,9476	31,9988
Argon (Ar)	0,934	39,948
Anidride Carbonica (CO <sub>2</sub> )	0,0314	44,00995
Neon (Ne)	0,001818	20,183
Elio (He)	0,000524	4,0026
Krypton (Kr)	0,000114	83,80
Xenon (Xe)	0,0000087	131,30
Idrogeno (H <sub>2</sub> )	0,00005	2,01594
Monossido di azoto (N <sub>2</sub> O)	0,00005	44,0128
Ozono (O <sub>3</sub> )	Estate: 0 ÷ 0,000007 Inverno: 0 ÷ 0,00002	47,9982
Metano (CH <sub>4</sub> )	0,00015	16,04303
Biossido di Zolfo (SO <sub>2</sub> )	0 ÷ 0,0001	64,0628
Biossido di Azoto (NO <sub>2</sub> )	0 ÷ 0,000002	46,0055
Ammoniaca (NH <sub>3</sub> )	da 0 a tracce	17,03061
Monossido di Carbonio (CO)	da 0 a tracce	28,01055
Iodio (I <sub>2</sub> )	0 ÷ 0,000001	253,8088

Ricordando che per una miscela ideale di gas ideali la frazione molare è equivalente alla frazione volumetrica [relazione (10.9)], e, utilizzando i valori di tabella 10.1, l'aria secca atmosferica ha massa molare equivalente (10.7), pari a:

$$M_a = \sum x_i M_i = 28,97 \text{ kg / kmole}$$

Essa viene trattata come un gas ideale la cui costante caratteristica è:

$$R_a = R^* / M_a = 8314 / 28.87 = 287 \text{ J / (kg K)}$$

Si ricorda che la costante caratteristica del vapore è invece  $R_v = 461.5 \text{ J / (kg K)}$ .

Per caratterizzare lo stato termodinamico dell'aria umida, alla luce di quanto sopra esposto, occorre tuttavia considerare oltre a quelle già note, nuove grandezze di stato, necessarie in particolare a definire nella miscela i rapporti quantitativi reciproci aria secca-vapore d'acqua, e delle quali viene fornita nel seguito la definizione.

### **Umidità specifica $x$**

Caratterizza il tenore in vapore d'acqua dell'aria umida. Viene definita come il rapporto tra la massa di vapor d'acqua e la massa di aria secca contenute nello stesso volume di aria umida:

$$x = \frac{m_v}{m_{as}} \quad (10.10)$$

$m_v$  = massa di vapore contenuta in un certo volume di aria umida [kg]

$m_{as}$  = massa di aria secca contenuta nello stesso volume di aria umida [kg<sub>as</sub>]

Poiché fintanto che la pressione parziale del componente condensabile (il vapore acqueo) rimane inferiore al valore della pressione di saturazione, non si ha condensazione, esso è considerato a tutti gli effetti un gas ideale. Si ottiene allora, data la validità della Legge di Dalton-Gibbs, la seguente espressione:

$$x = \frac{r_v}{r_a} = \frac{p_v}{R_v T} \cdot \frac{R_a T}{p_a} = \frac{p_v \cdot R_a}{p_a \cdot R_v} = \frac{R^*}{M_a} \cdot \frac{M_v}{R^*} \cdot \frac{p_v}{p_a} = 0,622 \cdot \frac{p_v}{p - p_v} \quad (10.11)$$

avendo considerato che:

$$M_v = 18,01534 \text{ kg / kmol}$$

$$M_a = 28,97 \text{ kg / kmol}$$

E con:

$p_v$  = pressione parziale del vapore acqueo [Pa];

$p_a$  = pressione parziale dell'aria secca [Pa];

$p$  = pressione totale della miscela [Pa] =  $p_a + p_v$

### **Umidità relativa $\varphi$**

L'umidità relativa  $\varphi$  è il rapporto, tra la massa di vapore acqueo  $m_v$  contenuto in un certo volume  $V$  di aria umida e la massima massa di vapore  $m_s$  contenibile nello stesso volume

(condizioni di saturazione) alla stessa temperatura T:

$$j = \frac{m_v}{m_s} \Big|_T = \frac{p_v \cdot V / (R_v \cdot T)}{p_s \cdot V / (R_v \cdot T)} \quad (10.13)$$

Quindi nell'ipotesi di miscela ideale l'umidità relativa è anche il rapporto tra la pressione parziale del vapore  $p_v$  e la pressione del vapore saturo  $p_s$  valutate alla stessa temperatura:

$$j = \frac{p_v}{p_s} \Big|_T \quad (10.12)$$

in genere tale rapporto viene espresso in percentuale, pertanto l'umidità relativa può variare tra un minimo di 0% (assenza di vapore acqueo) ad un massimo del 100% (aria satura). Le condizioni alla saturazione sono tali che un qualsiasi aumento in massa della quantità di vapore acqueo in fase aeriforme non è più possibile, ed il vapore si separa dalla miscela condensando. La pressione di vapor saturo è ricavabile da apposite tabelle oppure dalla relazione:

$$\log p_s = \frac{A \cdot t}{B + t} + C \quad (10.14)$$

-40 °C < t < 0 °C:	A = 22,376;	B = 271,68;	C = 6,4146
0 °C < t < +40 °C:	A = 17,438;	B = 239,78;	C = 6,4147

con t [°C] e  $p_s$  [Pa]. Tale relazione è proposta dal CETIAT [*Tables de l'air humide* - CETIAT Villeurbanne, 1976]. La relazione (10.12), consente di mettere in relazione l'umidità specifica con l'umidità relativa:

$$x = 0,62198 \cdot \frac{j \cdot p_s}{p - j \cdot p_s} \quad (10.15)$$

### **Entalpia dell'aria umida**

Prima di affrontare una sua qualsiasi trasformazione termodinamica occorre definire l'entalpia dell'aria umida. Nell'ipotesi di miscela ideale, l'entalpia può essere espressa come somma dell'entalpia parziale dell'aria secca e di quella del vapore acqueo.

Poiché nei processi termodinamici sarà la portata di aria secca a rimanere inalterata (non potendo separarsi in un altro stato di aggregazione), mentre potrà variare il suo contenuto di vapore acqueo, risulta comodo esprimere l'entalpia specifica dell'aria umida non con riferimento all'unità di massa totale della miscela (al kg di aria più vapore), ma piuttosto con riferimento ad una massa totale di miscela che contiene l'unità di massa d'aria secca più la massa di vapore. Dalla definizione di umidità specifica, tale massa di riferimento è pari a (1 + x) unità di massa della miscela. Risulta pertanto:



$$h = h_a + x h_v \quad (10.16)$$

dove:

$h_a$  = entalpia specifica dell'aria secca [J/kg<sub>as</sub>],

$h_v$  = entalpia specifica del vapore d'acqua [J/kg].

Si assume come stato di riferimento convenzionale con valore nullo per l'entalpia,  $h_{a,0} = 0$  J/kg<sub>as</sub>, quello a temperatura  $T_0 = 273,15$  K. Risulta quindi:

$$h_a = c_{pa} (T - T_0) \quad (10.17)$$

in cui si può assumere per il calore specifico dell'aria  $c_{pa}$  un valore in prima approssimazione costante pari a 1,006 kJ / (kg<sub>as</sub> K). D'altra parte il calore specifico dell'aria secca può essere calcolato in funzione della temperatura, grazie all'espressione:

$$c_{pa} = 1,04694 - 3,189 \cdot 10^{-4} \cdot T + 0,7442 \cdot 10^{-6} \cdot T^2 - 2,9730 \cdot T^3 \quad (10.18)$$

con T in [K] compreso tra 275 e 600K;  $c_{pa}$  è espresso in kJ/(kg<sub>as</sub> K).

Il valore di  $h_v$  può essere ricavato dalle tabelle del vapor d'acqua in condizioni di vapore saturo secco. Nei calcoli si preferisce tuttavia, facendo riferimento per  $h_v = 0$  allo stato di liquido saturo a  $T = 273,15$  K (= 0°C), ricorrere all'espressione:

$$h_v = r_0 + c_{pv} \cdot (T - T_0) \quad (10.19)$$

con:

$r_0$  = calore di vaporizzazione dell'acqua a 273,15 K pari a 2501 kJ/kg;

$c_{pv}$  = calore specifico a pressione costante del vapor d'acqua surriscaldato, supposto in prima approssimazione costante e pari a 1,875 kJ/(kg K).

L'entalpia specifica dell'aria umida può essere determinata con l'espressione:

$$h = c_{pa} (T - T_0) + x \cdot [r_0 + c_{pv} \cdot (T - T_0)] \quad (10.20)$$

inserendo i valori numerici, ed esprimendo la temperatura in gradi Celsius:

$$h = 1,006 \cdot t + x \cdot (2501 + 1,875 \cdot t) \quad [\text{kJ} / \text{kg}_a] \quad (10.20b)$$

### **Densità dell'aria umida**

La massa di aria umida contenuta nell'unità di volume è definita da:

$$r_{au} = \frac{m_a + m_v}{V}$$

Essendo entrambi i componenti gas a comportamento ideale:

$$p_a V = m_a R \frac{T}{M_a} \quad p_v V = m_v R \frac{T}{M_v}$$

e quindi:

$$m_a = p_a V \frac{M_a}{RT} \quad m_v = p_v V \frac{M_v}{RT}$$

In definitiva essendo  $M_v/M_a = 0,622$ :

$$r_{au} = \frac{p_a M_a + p_v M_v}{R^* T} = \frac{M_a}{R^* T} (p_a + 0,622 p_v)$$

Per l'aria secca (gas ideale in condizioni di riferimento  $T_0, p_0, \rho_0$ ):

$$r_0 = \frac{M_a p_0}{R^* T_0}$$

e dal rapporto tra le due relazioni si ottiene:

$$r_{au} = r_0 \frac{T_0}{T} \frac{p - (1-0,622)p_v}{p_0} = r_0 \frac{T_0}{T} \frac{p - 0,378 p_v}{p_0}$$

Ricavando  $p_v$  in funzione dell'umidità specifica  $x$ :

$$x = 0,622 \frac{p_v}{p - p_v} \quad p_v = 0,622 \frac{x \cdot p}{x + 0,622}$$

si ottiene infine:

$$r_{au} = r_0 \frac{T_0}{T} \frac{p}{p_0} \frac{0,622 (1+x)}{(0,622 + x)} \quad v_{au} = \frac{1}{r_0} \frac{T}{T_0} \frac{p_0}{p} \frac{(0,622 + x)}{0,622 (1+x)}$$

fissati  $T$  e  $p$ , il volume specifico dell'aria umida aumenta al crescere dell'umidità specifica  $x$  dell'aria. Si noti che, se  $T = T_0$  e  $p = p_0$ , la densità dell'aria umida è minore della densità dell'aria secca  $\rho_0$ .

### **Temperatura di rugiada (dew point)**

Per una massa di aria umida in un determinato stato termodinamico, si definisce temperatura di rugiada  $t_r$  la temperatura alla quale occorre raffreddare tale massa di aria umida per

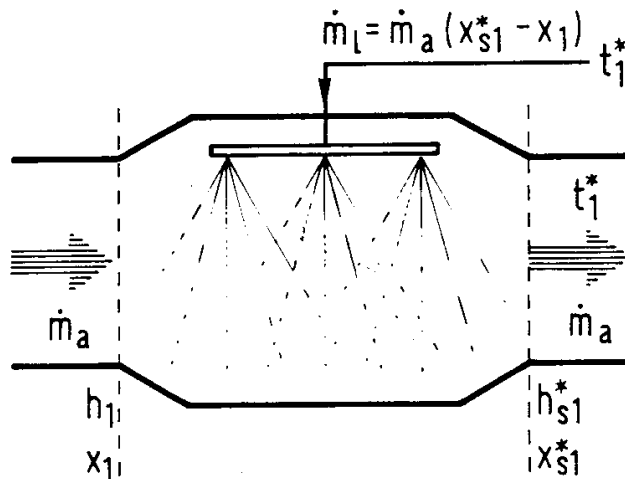
ottenere la condizione di saturazione, mantenendo costante il valore dell'umidità specifica e la sua pressione totale  $p$ . A questa temperatura  $t_r$ , si ha:

$$p_v = p_s(t_r).$$

### **Temperatura di saturazione adiabatica**

Si tratta di quel particolare valore di temperatura alla quale l'acqua, evaporando nell'aria in modo adiabatico, porta l'aria stessa in condizioni di saturazione a quella stessa temperatura. Tale valore di temperatura è univocamente determinato dallo stato termodinamico iniziale dell'aria.

L'apparecchiatura coinvolta nella definizione della temperatura di saturazione adiabatica è illustrata in figura 10.1.



**Figura 10.1.** Processo di saturazione adiabatica (fonte [1]).

Una portata di aria umida, espressa per comodità come corrispondente portata di aria secca  $m_a$ , viene portata in condizioni di saturazione mediante l'iniezione, attraverso appositi ugelli, della portata d'acqua  $m_l$  (di entità necessaria e sufficiente allo scopo). Il processo a regime permanente è adiabatico ed isoterma. L'apparecchiatura è chiamata **saturatore adiabatico**. Per l'acqua di alimentazione è imposto lo stesso valore di temperatura dell'aria umida che esce dall'apparecchio, tale valore è la temperatura di saturazione adiabatica dell'aria nello stato di ingresso 1:  $t_1^*$ .

Per questo processo con deflusso a regime permanente, adiabatico e senza scambio di lavoro, in base al primo principio si ha:

$$m_a \cdot h_1 + m_l \cdot h_l = m_a \cdot h_{s1}^*$$

dove  $h$  è l'entalpia specifica del liquido nelle condizioni di ingresso; tenendo conto delle convenzioni poste riguardo gli stati di riferimento ad entalpia nulla, si può porre:

$$h_1 = c_l \cdot t_1 = c_l \cdot t_1^*$$

dove  $c_l$  è il calore specifico del liquido saturo, e le temperature sono in gradi Celsius.  
Il bilancio di massa del componente acqua porge inoltre:

$$m_1 = m_a \cdot (x_{s1}^* - x_1)$$

quindi la precedente espressione del primo principio può essere scritta in riferimento all'unità di portata massica:

$$h_1 + (x_{s1}^* - x_1) \cdot c_l \cdot t_1 = h_{s1}^*$$

Data l'entità dei termini che compaiono in quest'ultima relazione, non si commette un grosso errore, nella maggior parte dei casi tecnici, nel considerare la temperatura di saturazione adiabatica coincidente con la temperatura dell'aria satura allo stesso valore di entalpia specifica dell'aria umida nelle condizioni iniziali (trascurando cioè l'entalpia dell'acqua liquida che viene aggiunta). In tal caso:

$$h_1 = h_{s1}^*$$

**ed il processo di saturazione adiabatico è considerato approssimativamente isoentalpico**

Si osservi come, per un prefissato valore di pressione totale  $p$ , sia possibile associare ad ogni valore di temperatura  $t^*$  i corrispondenti valori di umidità specifica  $x_s^*$  ed entalpia specifica  $h_s^*$  a saturazione, utilizzando le (10.11) e la (10.20b).

Dall'ultima relazione è ricavabile la seguente relazione più generale che individua, su un diagramma psicrometrico che verrà nel seguito illustrato, il luogo degli stati  $(x, h)$  aventi  $t^*$  come temperatura di saturazione adiabatica.

$$\frac{h_s^* - h}{x_s^* - x} = c_l \cdot t^*$$

Su un diagramma psicrometrico in coordinate  $x, h$  questa equazione rappresenta la pendenza delle isoterme a bulbo bagnato, che quasi coincidono con le isoentalpiche (per le quali il termine al secondo membro di quest'ultima equazione sarebbe nullo).

### **Temperatura a bulbo umido (o bagnato)**

E' la temperatura cui si porta una massa d'acqua in condizioni di equilibrio di scambio termico convettivo e di massa con aria in moto fortemente turbolento.

Quando l'aria in condizioni di temperatura ed umidità qualsivoglia, ma non satura, lambisce a velocità sostenuta (oltre 3 m/s) un termometro, opportunamente schermato da ogni effetto radiante, il cui bulbo (elemento sensibile) è mantenuto bagnato da una garza umida (vedi Figura 10.1), si assiste alla vaporizzazione dell'acqua della garza nell'aria.

All'equilibrio il flusso termico richiesto dall'acqua per il cambiamento di fase è compensato

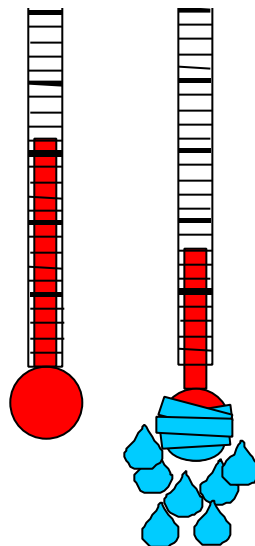
dal flusso termico convettivo da aria ad acqua che bagna il bulbo, questo flusso causa il raffreddamento dell'aria che lambisce la garza nonché del bulbo stesso.

Questo «abbassamento psicrometrico» della temperatura del bulbo bagnato è condizionato dall'entità degli scambi di calore e di massa, dunque dipende dal moto dell'aria nell'intorno del bulbo.

All'uscita dalla garza l'aria si presenta satura ed a una temperatura inferiore, che è la temperatura di equilibrio del bulbo bagnato. Nelle usuali condizioni ambientali si può ritenere, con buona approssimazione, che tale temperatura, detta a *bulbo bagnato*  $T_{bb}$ , coincida con la temperatura dell'aria satura a eguale valore di entalpia dell'aria umida in considerazione.

Con errore generalmente accettabile si possono quindi considerare **coincidenti** con la **temperatura di saturazione isoentalpica** sia la **temperatura di saturazione adiabatica** che la **temperatura a bulbo umido**.

L'importanza della temperatura a bulbo umido è dovuta al fatto che, dopo la temperatura a bulbo secco e la pressione, essa costituisce il terzo parametro di agevole determinazione necessario ad individuare lo stato termodinamico dell'aria umida.



**Figura 10.1.** Termometro a bulbo umido

#### 10.4 Diagrammi Psicometrici

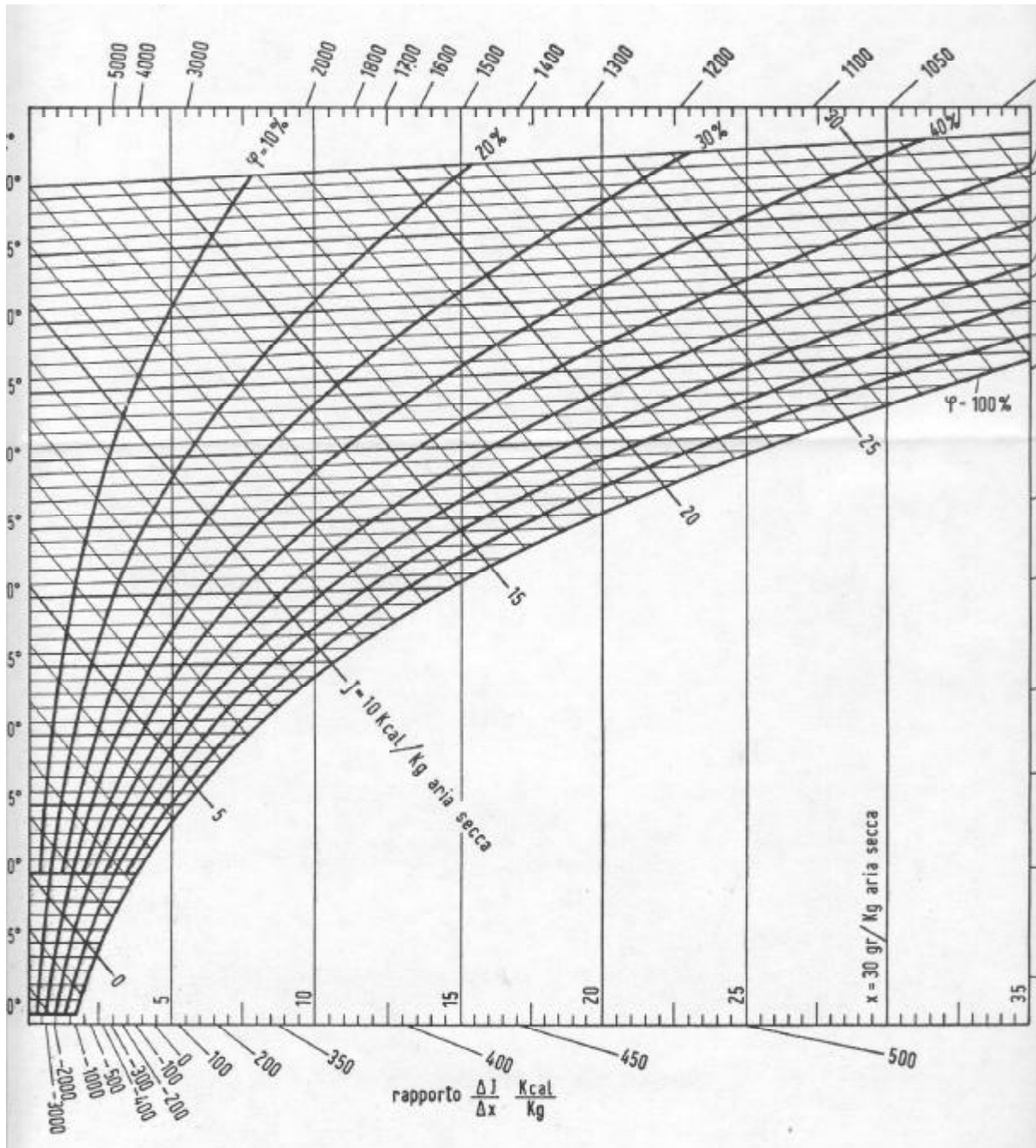
Attraverso le grandezze termodinamiche e le relazioni definite e ricavate nel paragrafo precedente è possibile individuare un qualsiasi stato termodinamico dell'aria umida e valutare le variazioni delle diverse grandezze in conseguenza delle diverse trasformazioni.

Risulta però utile poter rappresentare i diversi stati dell'aria umida in un diagramma di stato tracciato proprio sulla base delle suddette relazioni. Un diagramma di questo tipo viene chiamato diagramma psicrometrico e ne esistono diverse versioni, ricavate in ambiti tecnici differenti, ma che per le nostre applicazioni sono del tutto equivalenti.

Poiché i normali processi tecnici che interessano il condizionamento dell'aria o l'essiccamento hanno luogo a pressione costante, i diagrammi di stato dell'aria umida sono riferiti ad una pressione totale costante, comunemente quella di 1 atm = 101325 Pa.

In questi diagrammi vengono scelte due grandezze termodinamiche da rappresentare lungo gli assi coordinati (t e x, h e x) e vengono tracciate le curve iso-valore per le altre grandezze termodinamiche (umidità relativa, volume specifico, ecc.).

In particolare considereremo due diversi diagrammi di stato dell'aria umida: quello di Mollier, più utilizzato in Europa (Figura 10.2), ed il diagramma «Carrier» più utilizzato negli USA (Figura 10.3). La lettura dei punti di equilibrio nei due diagrammi è identica.



**Figura 10.2.** Diagramma di Mollier dell'aria umida

Nel diagramma di Mollier gli assi sono obliqui, su quello verticale è riportata l'entalpia ( $h$ ), mentre su quello obliquo sub-orizzontale è riportata l'umidità specifica ( $x$ ), come linee parametriche sono riportate le linee iso-umidità relativa (quella corrispondente a  $\varphi = 1$  è detta «curva di saturazione»), le isoterme a bulbo secco, le iso-volume specifico.

Per individuare l'andamento delle isoterme a bulbo secco nel diagramma, si consideri l'espressione dell'entalpia specifica dell'aria umida (10.20):

$$h = c_{pa} \cdot t + x \cdot (r_0 + c_{pv} \cdot t)$$

È evidente come, a  $t$  costante,  $h$  e  $x$  siano correlate linearmente, pertanto nel diagramma le isoterme avranno andamento rettilineo. L'isoterma corrispondente a  $t = 0$  passa per l'origine degli assi ed ha equazione:  $h = x \cdot r_0$ . Graficamente l'inclinazione dell'asse sub-orizzontale coordinato  $x$  viene scelta in modo che quest'ultima isoterma sia orizzontale e normale all'asse coordinato dell'entalpia (che è verticale).

Per quanto nel diagramma possano apparire, per motivi di scala, parallele tra loro, le linee isoterme individuate dai vari valori della  $t$  costituiscono un fascio di rette che converge in un punto, di coordinate:

$$x' = -c_{pa} / c_{pv} \quad ; \quad h' = -r_0 \cdot c_{pa} / c_{pv}$$

Essendo negativo il parametro  $x$ , questo punto non rappresenta uno stato dell'aria umida.

Tracciate le isoterme è facile individuare su di esse lo stato di saturazione, determinando il valore di  $x_s$  mediante la (10.15), essendo la  $p_s$  dell'acqua funzione univoca della temperatura. Analogamente si possono tracciare per punti sulle isoterme le curve corrispondenti agli altri valori dell'umidità relativa.

Per comodità di lettura sul diagramma i valori delle temperature sono segnati in corrispondenza delle intersezioni delle isoterme con l'asse delle ordinate, mentre i valori delle entalpie sono segnati su un'altra scala (al bordo del diagramma).

L'altro diagramma, riportato in figura (10.3), è l'immagine speculare del precedente, ruotato di  $90^\circ$ . Sul suo asse orizzontale sono riportate le temperature a bulbo secco, e sull'asse verticale i valori dell'umidità specifica.

DIAGRAMMA PSICROMETRICO

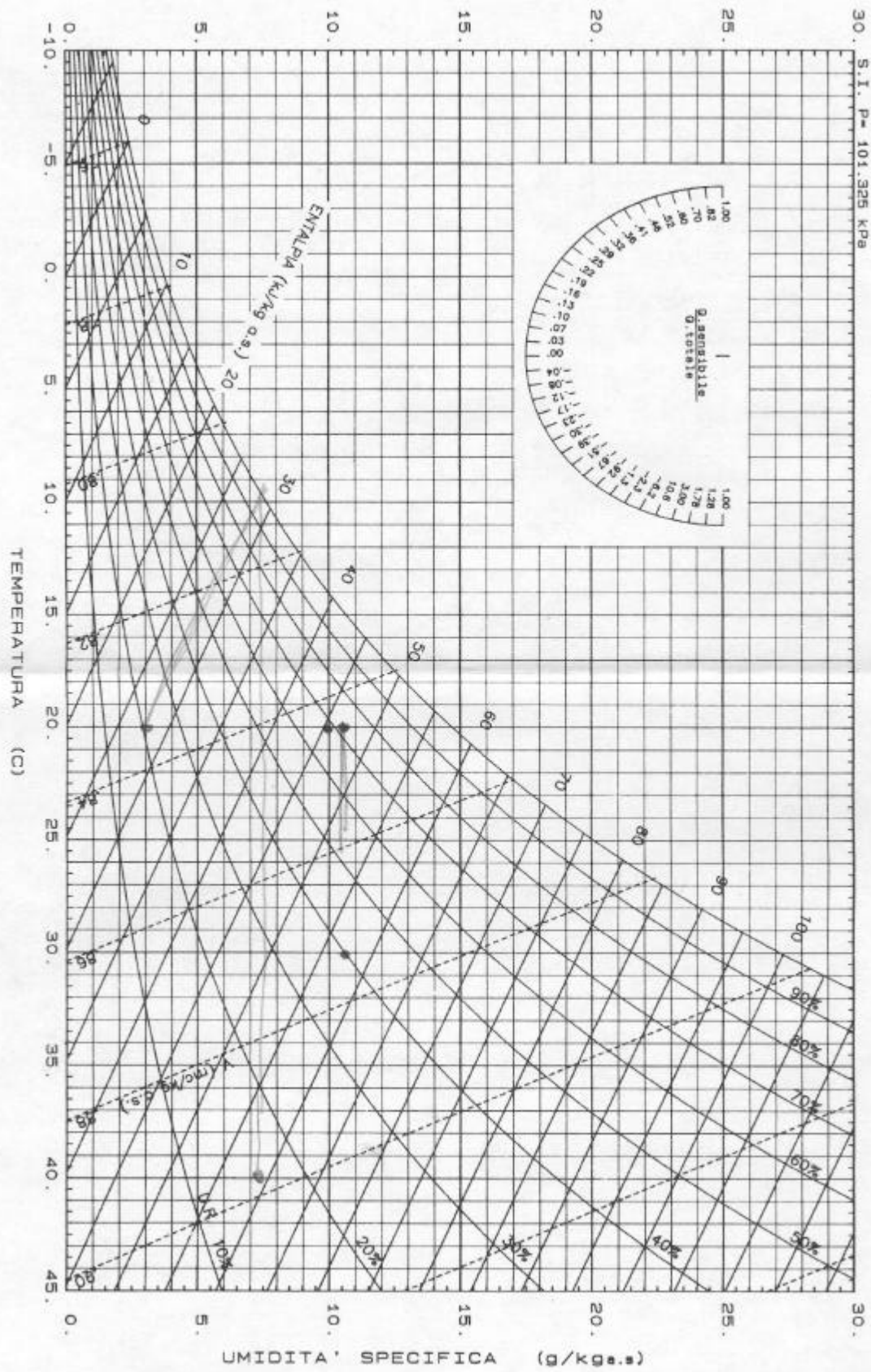


Figura 10.3. Diagramma Carrier dell'aria umida



## 10.5 Le Trasformazioni dell'aria umida

### Miscelamento adiabatico

Con riferimento alla Figura 10.4, la miscelazione di due differenti portate di aria umida richiede che siano soddisfatti i bilanci di energia e di massa espressi dalle relazioni seguenti:

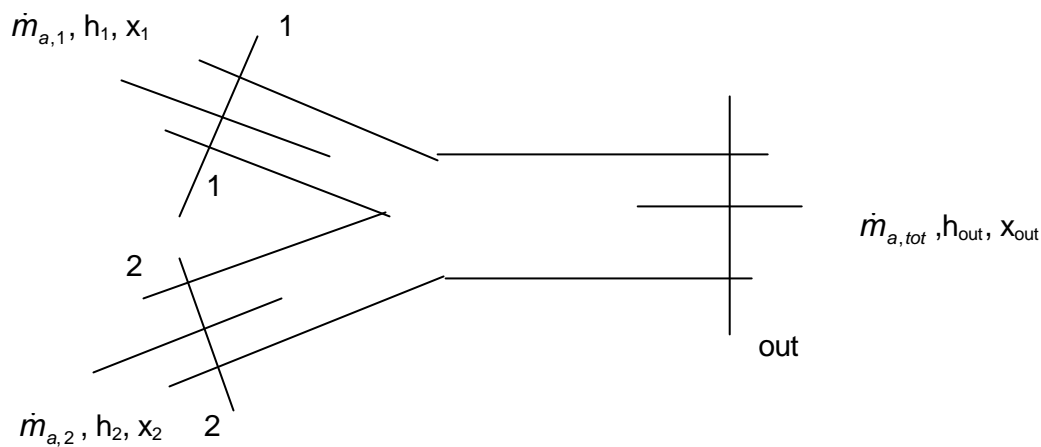
$$\dot{m}_{a,1} + \dot{m}_{a,2} = \dot{m}_{a,tot} \quad (10.21)$$

$$\dot{m}_{a,1} \cdot x_1 + \dot{m}_{a,2} \cdot x_2 = \dot{m}_{a,tot} \cdot x_{out} \quad (10.22)$$

$$\dot{m}_{a,1} \cdot h_1 + \dot{m}_{a,2} \cdot h_2 = \dot{m}_{a,tot} \cdot h_{out} \quad (10.23)$$

Mettendo a sistema le tre relazioni, ovvero sostituendo la prima nelle altre due, si ottiene:

$$\frac{\dot{m}_{a,1}}{\dot{m}_{a,2}} = \frac{x_2 - x_{out}}{x_{out} - x_1} = \frac{h_2 - h_{out}}{h_{out} - h_1} \quad (10.24)$$

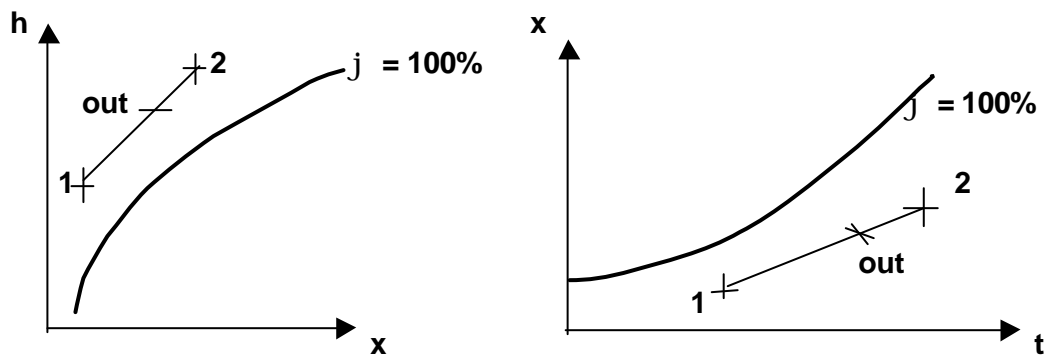


**Figura 10.4.** Miscelamento adiabatico

Nel diagramma psicrometrico di Mollier il punto di miscelazione giace sulla congiungente i punti 1 e 2 dividendola in due segmenti di lunghezza proporzionale alle portate miscelate (al solito espresse in kg di aria secca). Esso si può determinare grazie al rapporto tra le portate di massa di aria secca  $\dot{m}_{a,1}$  ed  $\dot{m}_{a,2}$  che arrivano alla miscelazione. Il punto rappresentativo della condizione di uscita sarà più prossimo alla condizione relativa alla portata maggiore.

Se il punto rappresentativo della condizione della miscela cade fuori del campo di esistenza della fase omogenea aeriforme aria secca-vapore, si ha separazione di fase condensata (zona della nebbia)

La Figura 10.5 rappresenta le tre condizioni nel diagramma termodinamico.



**Figura 10.5.** Miscelamento adiabatico

*Riscaldamento o raffreddamento a umidità specifica costante ( $x = \text{costante}$ )*

In questo processo, si dice che avviene un riscaldamento o raffreddamento *sensibile*: la miscela non cambia il suo contenuto di vapore acqueo ma solo la sua temperatura.

Nel processo di riscaldamento sensibile, oltre ad aumentare la temperatura, diminuisce il valore dell'umidità relativa; nel processo di raffreddamento sensibile, oltre a diminuire il valore della temperatura cresce il valore dell'umidità relativa.

Il processo avviene quando la portata d'aria viene ad esempio fatta passare attraverso una serie di resistenze elettriche scaldanti, o all'interno di una batteria alettata (scambiatore di calore) per scambiare una data potenza termica  $q_{12}$  con un fluido a temperatura più elevata (riscaldamento) o più bassa (raffreddamento). Tale potenza termica è così determinabile:

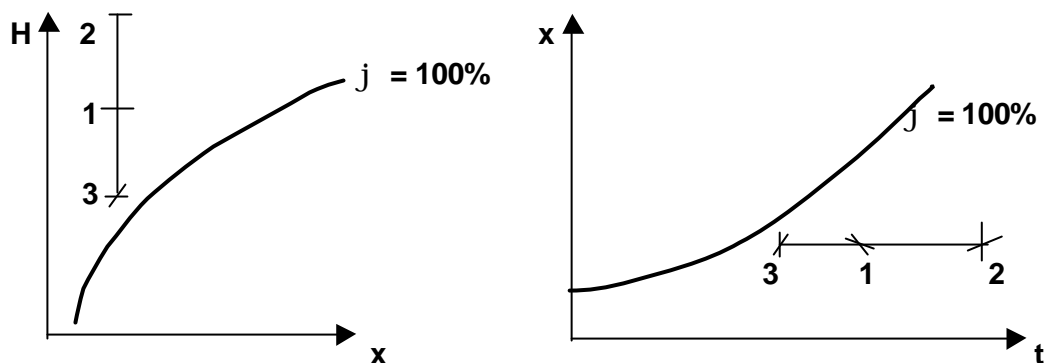
*riscaldamento*

$$q_{12} = \dot{m}_a \cdot (h_2 - h_1) = \dot{m}_a \cdot (c_{p,a} + x_1 \cdot c_{p,v}) \cdot (t_2 - t_1) \quad (10.25)$$

*raffrescamento*

$$q_{13} = \dot{m}_a \cdot (h_3 - h_1) = \dot{m}_a \cdot (c_{p,a} + x_1 \cdot c_{p,v}) \cdot (t_3 - t_1) \quad (10.26)$$

La Figura 10.6 riporta i processi di riscaldamento (1-2) e di raffreddamento (1-3) sensibile.

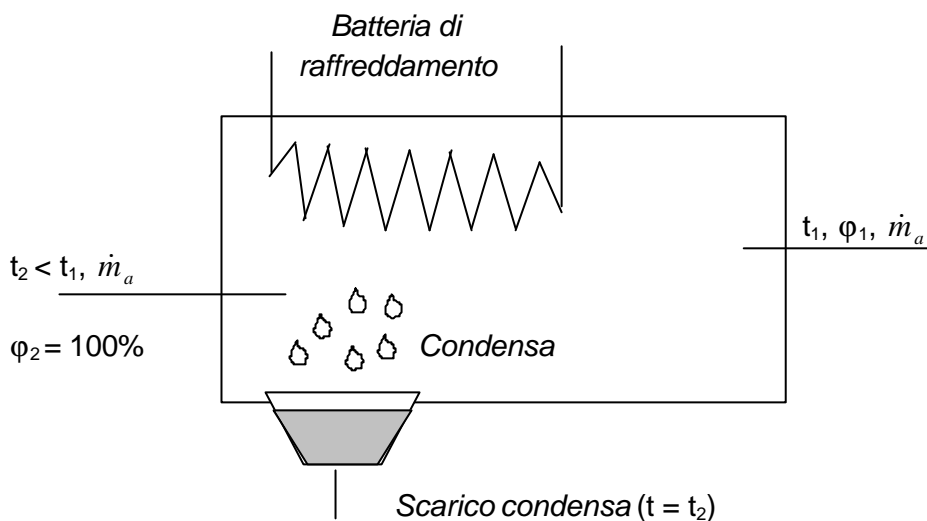


**Figura 10.6.** Riscaldamento (1-2) e raffreddamento (1-3) ad umidità specifica costante.

Nel raffreddamento sensibile la temperatura della superficie di scambio (batteria alettata) deve essere in ogni punto superiore alla temperatura  $t$  di rugiada del punto 1 per evitare condensazione di vapore sulla batteria. Se questa condizione è soddisfatta il processo non modifica il titolo della miscela, è a umidità specifica costante o iso-titolo.

### Raffreddamento e deumidificazione

E' il processo richiesto nella maggior parte degli impianti di condizionamento estivo dell'aria. In questo caso, a differenza del caso precedente, l'aria viene a contatto con una superficie la cui temperatura è inferiore a quella di rugiada, valutata per le condizioni all'ingresso 1 (vedi figura 10.7): all'uscita l'aria è satura.



**Figura 10.7.** Schema di una batteria di raffreddamento e deumidificazione

Risulta diminuita sia la temperatura che il contenuto di vapore acqueo (ovvero l'umidità specifica  $x$ ).

In regime permanente il primo principio consente di scrivere:

$$q_{12} + \dot{m}_a \cdot h_1 = \dot{m}_a \cdot h_2 + \dot{m}_l \cdot h_l$$

essendo la portata d'acqua condensata esprimibile come:

$$\dot{m}_l = \dot{m}_a \cdot [x_1 - x_2]$$

risulta:

$$q_{12} = + \dot{m}_a \cdot [(h_2 - h_1) - (x_2 - x_1) \cdot h_l]$$

dove  $h_l = c_l \cdot t_l$  è l'entalpia dell'acqua liquida alla temperatura di scarico, che si può assumere  $= t_2$  ed è generalmente trascurabile. Pertanto:

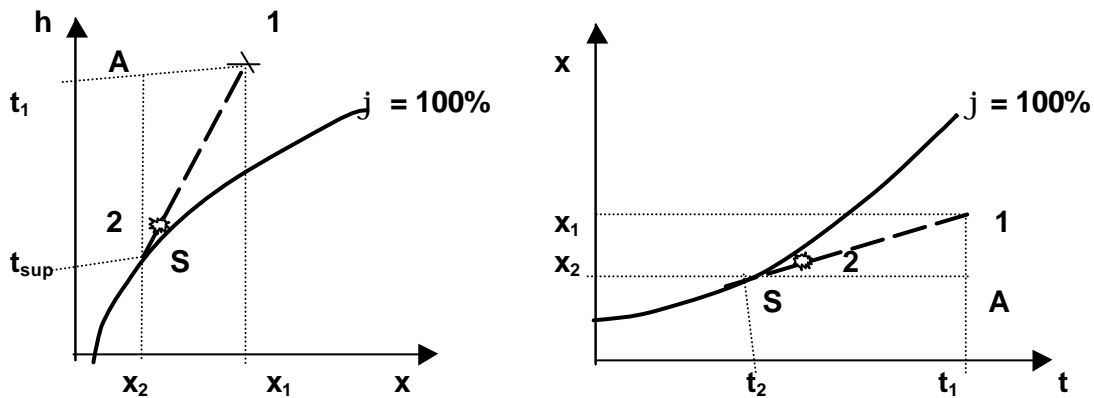
$$q_{12} \cong \dot{m}_a \cdot (h_2 - h_1)$$

Se  $t_s$  è il valore della temperatura della superficie fredda, esso individua un punto sulla curva di saturazione.

Si può dimostrare che, entro limiti di approssimazione accettabili in questa sede, il punto 2, rappresentativo dello stato dell'aria umida all'uscita dello scambiatore (che non corrisponde ad una condizione di saturazione) giace sul segmento che unisce i punti S e 1.

Questo ovviamente solo se  $t_s \leq t$  di rugiada dell'aria umida nelle condizioni di ingresso 1. La posizione del punto 2 sul segmento 1S dipenderà dall'entità dei fenomeni di scambio termico e di trasporto di massa realizzati.

È intuitivo che tanto più questi meccanismi saranno efficienti (quanto più estesa ad esempio sarà la batteria fredda nel senso del flusso d'aria) tanto più il punto 2 sarà vicino al punto S (di equilibrio termogrignometrico dell'aria con l'acqua condensata alla temperatura  $t_s$ ).



**Figura 10.8** Processo di raffreddamento con deumidificazione

La batteria viene caratterizzata con un parametro chiamato **Fattore di by-pass**

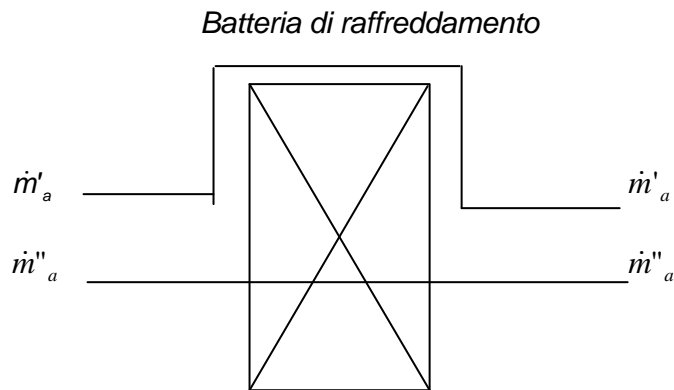
Si considera infatti lo stato 2 come ottenuto per miscelazione isobara di due frazioni della portata globale d'aria:

- la prima  $\dot{m}'_a$  che by-passa la batteria,
- la seconda  $\dot{m}''_a$  che realmente compie la trasformazione arrivando alle condizioni di saturazione S.

Si definisce il **Fattore di by-pass** come il rapporto tra le due portate:

$$BF = \frac{\dot{m}'_a}{\dot{m}''_a} = \frac{h_2 - h_S}{h_1 - h_2}$$

Il punto 2 potrebbe pertanto essere determinato come miscelamento (adiabatico ed isobaro) delle due portate di cui solo la  $\dot{m}''_a$  in condizione di saturazione.



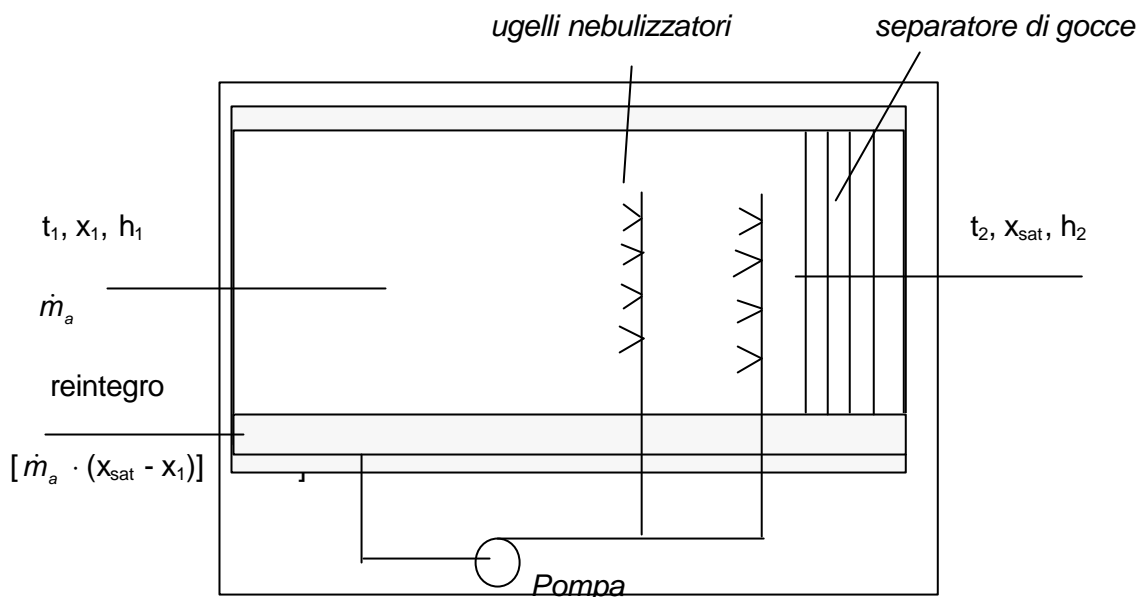
**Figura 10.9** Schema di by - pass

*Saturazione adiabatica*

Il processo di saturazione adiabatica avviene a pressione totale  $p$  costante in regime stazionario, trascurando le variazioni di energia cinetica e potenziale. Si ipotizzi quindi che una portata in massa di aria secca  $\dot{m}_a [(1 + x) \dot{m}_a$  unità di aria umida], nelle condizioni 1 (non sature) venga inviata in un saturatore.

In tale apparecchio, una portata d'acqua viene nebulizzata al fine di saturare la portata d'aria  $\dot{m}_a$ : nessuno scambio termico viene effettuato con l'ambiente esterno.

Inoltre, se si eccettua il lavoro per la circolazione dell'acqua, non vi è scambio di lavoro con l'esterno.



**Figura 10.10.** Saturatore adiabatico

Il Primo Principio della Termodinamica applicato al volume di controllo indicato in Figura 10.10, fornisce:

$$h_2 = h_1 + h_{\text{acqua}} \cdot (x_2 - x_1)$$

da cui:

$$h_2 - h_1 = h_{\text{acqua}} \cdot (x_2 - x_1)$$

$$\frac{h_2 - h_1}{x_2 - x_1} = h_l$$

con  $h_{\text{acqua}}$  entalpia specifica dell'acqua liquida di alimentazione del dispositivo.

Nella pratica il processo di umidificazione in un lavatore adiabatico **può essere considerato con buona approssimazione ad entalpia costante**, essendo il flusso di entalpia associato alla portata d'acqua liquida praticamente trascurabile rispetto all'entalpia dell'aria umida in ingresso.

Si definisce efficienza  $\epsilon$  dell'umidificatore nel seguente modo:

$$e = \frac{x_2 - x_1}{x_s - x_1}$$

Se si assume  $t$  acqua di alimentazione =  $t$  saturazione adiabatica alle condizioni dell'aria in ingresso  $t^*_1$ , anche all'uscita la temperatura di saturazione adiabatica avrà lo stesso valore:  $t^*_2 = t^*_1$ .

$$h_{\text{acqua}} = c_1 \cdot (t_2 - t_0)$$

con  $t_0=0^\circ\text{C}$  (=273,15 K).

## 10.6 La torre evaporativa

Nei processi tecnici si presenta spesso la necessità di asportare calore da un fluido di processo mediante scambio termico con acqua prelevata dall'ambiente esterno. Quando non è possibile utilizzare acqua in circuito aperto, prelevata da pozzi, laghi o fiumi, si ricicla acqua in circuito chiuso mediante la torre evaporativa.

In figura ... è rappresentata schematicamente una torre evaporativa a tiraggio meccanico con flussi in controcorrente: l'aria atmosferica fluisce dal basso verso l'alto per azione di un ventilatore, mentre l'acqua calda da raffreddare viene spruzzata da ugelli posti nella parte superiore e percola verso il basso, viene quindi raccolta in un bacino e rinviata all'utilizzazione. La discesa dell'acqua attraverso la torre può essere ritardata da elementi di riempimento (ad es. listelli di materiale plastico) .

Parte dell'acqua viene persa per evaporazione e trasporto nella corrente d'aria (circa il 3%). Il raffreddamento della restante acqua è provocato dall'asporto di calore di vaporizzazione richiesto dall'acqua che vaporizza nell'aria non satura di umidità.

Il valore minimo possibile per la temperatura dell'acqua in uscita è la temperatura di

saturazione adiabatica dell'aria in ingresso, valore che sarebbe teoricamente ottenibile con una torre di lunghezza infinita. Di solito il valore raggiunto dalla temperatura dell'acqua in uscita è di 5 °C superiore rispetto a questa temperatura di saturazione adiabatica dell'aria atmosferica, valore che può essere significativamente inferiore alla temperatura a bulbo secco della stessa aria.

## **Bibliografia**

- [1] A. Cavallini, L. Mattarolo. *Termodinamica Applicata*. Cleup, Padova, 1992
- [2] G. Guerra, J. Merigoux. *Tables de l'air humide*. CETIAT. Villeurbanne. Juin 1976
- [3] AA.VV. *Mésure d'humidité dans les gaz - Documents de stage de formation continué* CETIAT. Villeurbanne. 1990
- [4] ASHRAE. *Handbook of Fundamentals*. ASHRAE. 1997
- [5] C. Pizzetti. *Condizionamento dell'aria e refrigerazione*. Masson Italia. 1980