

8

LO SCAMBIO TERMICO PER CONDUZIONE

8.1 PREMessa: I MECCANISMI DI TRASMISSIONE DEL CALORE

In Termodinamica, il calore è stato definito come la forma assunta dall'energia in transito quando la sua trasmissione da un corpo ad un altro avviene solo in virtù di una differenza di temperatura.

L'insieme dei processi mediante i quali ha luogo tale trasporto di energia viene studiato in una disciplina distinta dalla Termodinamica la quale, basandosi sui concetti fondamentali della Termodinamica, studia l'evoluzione nel tempo degli eventi generati da stati di non equilibrio termico. Anche questa branca della fisica ha un forte carattere sperimentale e proprio dall'osservazione sperimentale dei fenomeni termici è possibile mettere in evidenza il fatto che lo scambio termico tra due *corpi*, aventi temperatura diversa, può avvenire:

- *per contatto in assenza di moto relativo tra due corpi*; l'osservazione sperimentale del fenomeno segnala che le temperature dei due corpi cambiano nel tempo fino a quando entrambi raggiungono la stessa temperatura, il cui valore risulta intermedio tra quelli delle loro temperature iniziali;
- *per contatto in presenza di moto relativo tra un corpo ed un fluido*; si osserva che, dopo un certo tempo, il corpo assume la stessa temperatura del fluido;
- *senza contatto tra corpi separati dallo spazio vuoto*; anche in questo caso l'osservazione sperimentale del fenomeno evidenzia il fatto che diminuisce la temperatura dei corpi caldi (raffreddamento) e contemporaneamente aumenta la temperatura di quelli freddi (riscaldamento).

L'osservazione sperimentale dello scambio termico indica inoltre che si tratta di un fenomeno complesso che, in generale, è costituito dalla sovrapposizione degli effetti di più fenomeni elementari ognuno dei quali può avere un ruolo prevalente o marginale secondo le proprietà del mezzo di trasmissione del calore. In ogni caso per trattare i problemi di Trasmissione del Calore si distinguono tre modi diversi meccanismi di trasmissione detti rispettivamente:

- **Conduzione**,
- **Convezione**,
- **Irraggiamento**

In questo e nei prossimi capitoli ognuno dei tre meccanismi di scambio termico verrà descritto allo scopo di metterne in chiaro le peculiarità e di evidenziare sinteticamente il carattere delle equazioni che consentono di rappresentarlo in maniera quantitativa.

8.2 LA CONDUZIONE TERMICA

La conduzione termica, da un punto di vista macroscopico, si manifesta come scambio di energia termica all'interno di corpi o tra corpi *solidi, liquidi o gassosi, in contatto* tra di loro, **senza movimento macroscopico di materia**.

Lo scambio termico è dovuto alla **cessione di energia cinetica molecolare (rotazionale e vibrazionale) da zone ad alta temperatura verso zone adiacenti a più bassa temperatura**. Nel caso particolare dei solidi metallici, oltre a tale meccanismo si deve considerare anche la componente di energia trasportata grazie al moto degli elettroni.

L'energia termica, che si scambia o che si propaga nel materiale considerato, dipende dalla geometria e dalle caratteristiche del corpo oltre che dalla differenza di temperatura tra le regioni del corpo interessate al fenomeno di scambio termico. Per esempio, se si riveste un serbatoio di acqua bollente con lana di vetro (materiale isolante termico), si riduce l'entità della dispersione termica all'aumentare dello spessore dell'isolante. Come pure tale dispersione dipenderà dalla differenza di temperatura tra acqua ed ambiente circostante oltre che dall'estensione dell'area disperdente.

8.3 IL POSTULATO DI FOURIER

Allo scopo di analizzare più nel dettaglio la conduzione e fissare alcuni concetti fondamentali è utile considerare, ripercorrendo le esperienze di uno scienziato francese del secolo scorso (Jean Fourier 1768 – 1830) un sistema molto semplice costituito da una barretta cilindrica di materiale omogeneo (struttura del materiale uniforme in ogni punto) ed isotropo (proprietà termofisiche indipendenti dalla direzione). Le estremità della barretta siano costituite da due superfici piane parallele a distanza Δx , mantenute a temperature diverse ed uniformi T_1 e T_2 :

$$T_1 > T_2 \quad T_1 - T_2 = \Delta T$$

Si consideri il corpo ben isolato lungo tutto l'involuppo in modo che il flusso termico abbia luogo solo lungo il suo asse.

La differenza di temperatura causa un flusso di potenza termica q_x attraverso la sezione A; si trova che:

$$Q_x \propto A \frac{\Delta T}{\Delta x} \quad (8.1)$$

Ossia si osserva la proporzionalità tra flusso termico, differenza di temperatura, lunghezza della barra e superficie della sezione A. Tale proporzionalità è esprimibile tramite un fattore detto conducibilità termica del materiale λ . Tale coefficiente, che è una proprietà fisica del materiale e ne misura il *comportamento*, si misura in $W/(m \cdot K)$. L'affermazione della (8.1) può allora essere riscritta come:

$$Q_x = -\lambda A \frac{\Delta T}{\Delta x} \quad (8.2)$$

in cui il segno meno (-) sta ad indicare che la direzione del flusso termico, se concorde con l'asse delle ascisse crescenti, deve comunque corrispondere al decrescere della temperatura (gradiente negativo). Questa relazione è nota come **postulato di Fourier**. In forma differenziale, l'equazione (8.2) può essere scritta nella forma:

$$Q_x = -\lambda A \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta x} = -\lambda A \frac{\partial T}{\partial x} \quad (8.3)$$

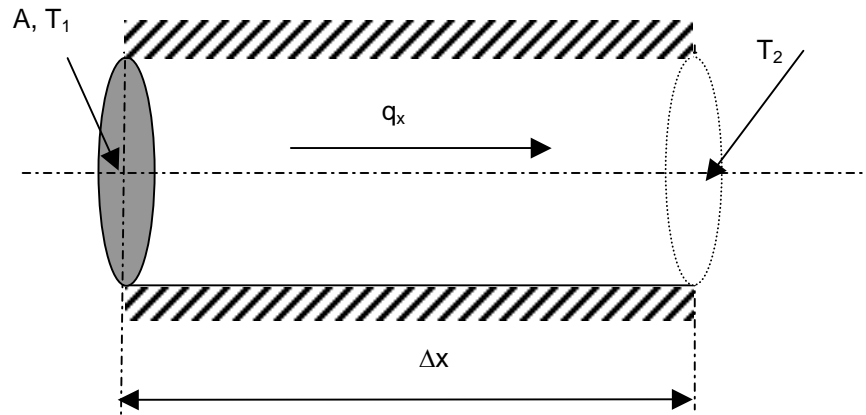


Figura 8.1: Flusso termico attraverso una barretta cilindrica.

Nel corpo considerato si avranno delle superfici a temperatura costante che approssimativamente possono essere individuate nei piani perpendicolari all'asse del cilindro. Si osserva quindi che il flusso termico si propaga in direzione perpendicolare alle superfici isoterme ossia, in termini matematici, lungo la direzione del vettore *gradiente di temperatura* $\Delta T/\delta x$. Tale situazione ha una validità generale, ossia su di un corpo qualsiasi una volta individuata una superficie isoterma il flusso di calore si propagherà in ogni punto in direzione perpendicolare a tale superficie.

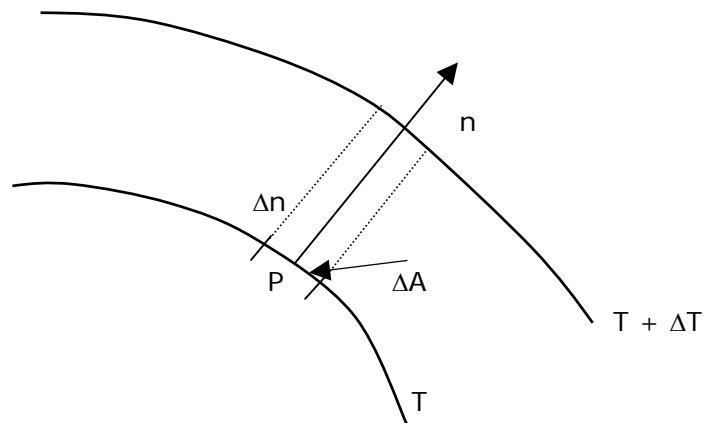


Figura 8.2: Direzione del flusso termico.

Si consideri allora su di una superficie isoterma alla temperatura T, un elemento di area ΔA contenente un punto P. Considerando la normale n alla superficie in P e l'isoterma a temperatura $T + \Delta T$, che sulla normale identifica il segmento Δn , e

trascurando il flusso termico disperso lateralmente dal cilindro di base ΔA ed altezza Δn così identificato (vedi Figura 8.3), si può scrivere:

$$Q = -\lambda \cdot \Delta A \cdot \frac{\Delta T}{\Delta n} = -\lambda \cdot \Delta A \cdot \frac{\partial T}{\partial n} \quad (8.4)$$

Il flusso termico specifico q , al tendere a zero dell'area ΔA , diviene:

$$q^* = -\lambda \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\dot{Q}}{\Delta A} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \quad (8.5)$$

A partire da tale relazione, per il fatto che il flusso termico è un vettore diretto *normalmente* alla superficie considerata, la relazione (8.5) può essere scritta in termini vettoriali, e per unità di area, si ha:

$$q^* = -\lambda \nabla T = -\lambda \left[\bar{i} \frac{\partial T}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial T}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial T}{\partial z} \right] \quad (8.6)$$

in cui i, j, k sono i versori dei tre assi cartesiani ortogonali. E' evidente che, in questo caso, q^* è il flusso specifico che si misura in W/m^2 .

8.4 IL COEFFICIENTE DI CONDUCIBILITÀ TERMICA λ

Il valore del *coefficiente di conducibilità termica* λ delle diverse sostanze varia entro limiti larghissimi, dipende dallo stato del materiale e può variare con la temperatura, la pressione e gli eventuali trattamenti termici che il materiale ha subito.

La conducibilità termica, come detto, si misura, nel sistema SI, in $W/(m K)$. La tabella 8.1 riporta a grandi linee i valori della conducibilità λ per le diverse classi di sostanze. La tabella 8.2 riporta i valori della conducibilità termica in unità del Sistema Internazionale per sostanze di frequente utilizzo.

Tabella 8.1. Valori della conducibilità termica per classi di materiali.

| Materiale | λ [W/(m K)] |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| <i>Gas alla pressione atmosferica</i> | 0,007 ÷ 0,2 |
| <i>Materiali isolanti</i> | 0,02 ÷ 0,2 |
| <i>Liquidi non metallici</i> | 0,05 ÷ 0,7 |
| <i>Solidi non metallici</i> | 0,3 ÷ 2,3 |
| <i>Metalli liquidi</i> | 8 ÷ 80 |
| <i>Metalli e leghe metalliche</i> | 14 ÷ 420 |

Tabella 8.2. Conduttività termica per alcuni materiali λ [W/(m K)]

| | | |
|---------------------------------|-----------|-----------|
| Acqua | | |
| liquido | 0,6 | W/ (m K) |
| ghiaccio | 1,8 | W/ (m K) |
| Legno | 0,15 | W/ (m K) |
| Balsa | 0,055 | W/ (m K) |
| Aria | 0,026 | W/ (m K) |
| Materiali isolanti | | |
| Polistirolo espanso | 0,024 | W/ (m K) |
| Sughero espanso | 0,036 | W/ (m K) |
| Lana di vetro | 0,04 | W/ (m K) |
| Fibra di vetro | 0,035 | W/ (m K) |
| Materiali da costruzione | | |
| Calcestruzzo | 0,8 ÷ 1,4 | W/ (m K) |
| Mattoni di argilla | 1,0 ÷ 1,2 | W/ (m K) |
| Marmo | 2,8 | W/ (m K) |
| Sabbia | 0,27 | W/ (m K) |
| Terreno | 0,52 | W/ (m K) |
| Alluminio | 200 | W/ (m K) |
| Vetro | 1,4 | W/ (m K) |
| Grafite | 1950 | W/ (m K)] |
| Diamante | 2300 | W/ (m K) |

8.5 L'EQUAZIONE GENERALE DELLA CONDUZIONE

Nei paragrafi precedenti è stato dato un inquadramento generale della conduzione termica; si cercherà qui di seguito di fornire una trattazione più generale del fenomeno in grado di descrivere qualsiasi situazione sperimentale.

Come si è già sottolineato lo scambio di energia per conduzione avviene per interazione diretta tra le molecole del mezzo che, ove esista un gradiente di temperatura, secondo le ipotesi della teoria cinetica si scambiano la loro energia cinetica rotazionale e vibrazionale. In seguito a tali scambi la quota di energia posseduta da ogni volume elementare del corpo si modifica e, di conseguenza, si modifica anche il campo delle temperature. Il fenomeno è pertanto descritto quando sia noto il campo di temperatura all'interno del corpo, campo che è in generale funzione delle coordinate spaziali x, y, z e del tempo τ . Lo studio del fenomeno richiede pertanto la precisazione della funzione scalare:

$$T = f(x, y, z, \tau) \quad (8.7)$$

Il luogo geometrico dei punti del corpo che in un certo istante del tempo τ hanno la medesima temperatura è una superficie isoterma. Le superfici isoterme non si intersecano mai tra loro in quanto un punto, in un certo istante, può avere un solo valore di temperatura.

Si osserva facilmente che in regime stazionario, cioè indipendente dal tempo, le superfici isoterme sono invariabili: ciò significa che, se si immagina di poter fotografare in istanti successivi la loro configurazione all'interno del corpo, le immagini che si otterrebbero risulterebbero identiche fra loro. In regime variabile, invece, le superfici isoterme sono mobili e deformabili: ciò significa che, se si immagina di poter fotografare in istanti successivi la loro configurazione all'interno del corpo, le immagini che si otterrebbero risulterebbero diverse istante per istante.

L'intersezione di un piano con le superfici isoterme determina su quel piano delle curve o linee isoterme che, come le superfici, sono continue e non possono intersecarsi tra loro: il maggior gradiente di temperatura si incontra attraversando le linee isoterme in una direzione n normale ad esse. Per esplicitare la (8.7), una possibile tecnica è quella di considerare un bilancio elementare di energia su un elemento infinitesimo di un generico corpo. Si consideri un mezzo omogeneo sul quale si vada a considerare un elemento infinitesimo di volume dV (Figura 8.4). La forma generale dell'equazione di conservazione dell'energia, limitatamente ai soli flussi termici, fornisce:

$$\dot{E}_{in} + \dot{E}_g - \dot{E}_{out} = \dot{E}_{st} \quad (8.8)$$

in cui: \dot{E}_{in} = potenza termica in ingresso [W];

\dot{E}_{out} = potenza termica in uscita [W];

\dot{E}_g = potenza termica generata [W];

\dot{E}_{st} = potenza termica immagazzinata [W].

Considero come superficie di controllo nel mezzo quella che delimita il volumetto $dV = dx \cdot dy \cdot dz$, si può procedere a esplicitare la relazione (8.8):

$$(q_x + q_y + q_z) + \dot{E}_g - (q_{x+dx} + q_{y+dy} + q_{z+dz}) = \dot{E}_{st}$$

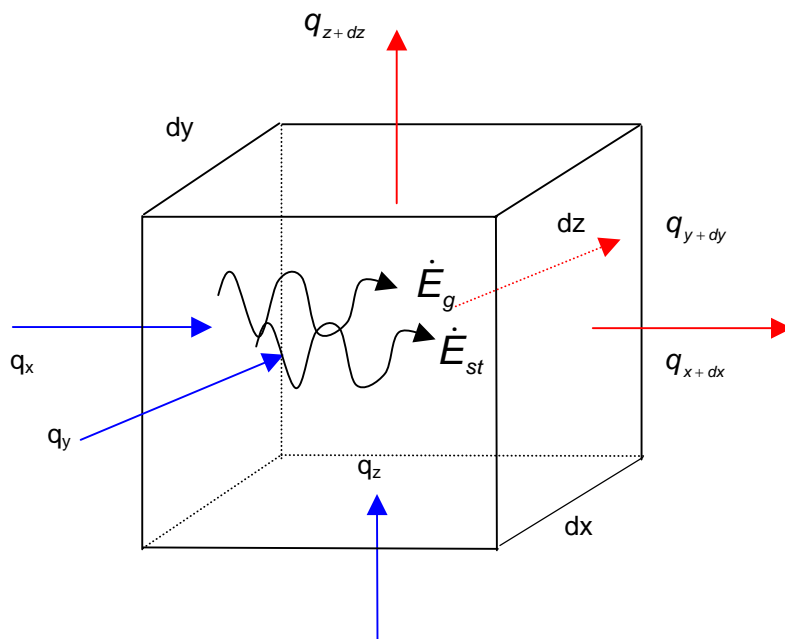


Figura 8.3: Bilancio sull'elemento infinitesimo dV

Scomponendo in serie di Taylor i termini relativi ai flussi termici in ingresso ed in uscita si ha:

$$q_{x+dx}^* = q_x^* + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \quad q_{y+dy}^* = q_y^* + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \quad q_{z+dz}^* = q_z^* + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz$$

Tali termini sono flussi termici puramente conduttivi e perciò devono essere valutati con la legge di Fourier, secondo la quale:

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} dy dz \quad q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} dx dz \quad q_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} dx dy$$

e pertanto i termini in uscita sono determinati come:

$$q_{x+dx} = - \left[\lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right] dx dy dz$$

$$q_{y+dy} = - \left[\lambda \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] dx dy dz \quad (8.9)$$

$$q_{z+dz} = - \left[\lambda \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] dx dy dz$$

Per quanto riguarda la generazione interna, ipotizzando che H sia la generazione di potenza termica per unità di volume [W/m^3], uniforme in tutto il volume infinitesimo dV , si può ricavare:

$$\dot{E}_g = H dx dy dz$$

Mentre per la potenza termica immagazzinata, si deve tener conto della massa δM del materiale considerato; tale massa si può esprimere come prodotto della densità ρ per il volume dV :

$$\delta M = \rho dx dy dz$$

e la potenza termica immagazzinata sarà determinata dalla variazione della temperatura nel tempo τ per il calore specifico c del materiale (se solido $c = c_p$), ovvero pari alla variazione temporale dell'energia interna U della sostanza:

$$\dot{E}_{st} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial \tau} dx dy dz \quad (8.10)$$

L'Equazione generale della conduzione (8.8) nella forma più generale, diviene, con le posizioni fatte:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + H = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (8.11)$$

Se λ è costante (mezzo omogeneo ed isotropo), è possibile rendere l'equazione (8.11) nella forma (equazione di Fourier):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{H}{\lambda} = \frac{\rho c_p}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (8.12)$$

Con il termine $\lambda/(c_p \rho)$ è designata la diffusività termica che, nel Sistema Internazionale si misura in $[m^2/s]$ ed è indicata in letteratura con il simbolo "a". La diffusività termica di un materiale può essere vista come la capacità che ha un materiale di condurre energia termica, rispetto alla sua capacità di accumulare energia. Un alto valore di diffusività termica indica una veloce propagazione dell'energia termica, mentre un valore basso, indica che nel materiale è preponderante l'accumulo. La Tabella 8.3 riporta i valori della diffusività termica per alcuni materiali. Se il regime è stazionario, la dipendenza dal tempo τ viene eliminata; la relazione (8.12) diviene (equazione di Poisson):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{H}{\lambda} = 0 \quad (8.13)$$

Senza generazione interna, si ottiene una forma più semplice (equazione di Laplace):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (8.14)$$

Tabella 8.3. Valore della diffusività termica a $[m^2/s]$ per alcune sostanze

| | | |
|-----------------------------|-----------------------------|---------|
| Metalli | | |
| Oro | 127×10^{-6} | m^2/s |
| Acciaio | 4×10^{-6} | m^2/s |
| Alluminio | 97×10^{-6} | m^2/s |
| Solidi non metallici | | |
| Legno | $20 \div 30 \times 10^{-6}$ | m^2/s |
| Calcestruzzo | $0,75 \times 10^{-6}$ | m^2/s |
| Mattoni | $0,52 \times 10^{-6}$ | m^2/s |
| Vetro | $0,34 \times 10^{-6}$ | m^2/s |
| Legno (quercia) | $0,13 \times 10^{-6}$ | m^2/s |
| Aria | | |
| | $22,4 \times 10^{-6}$ | m^2/s |
| Acqua | | |
| liquido | $0,14 \times 10^{-6}$ | m^2/s |
| solido | $1,2 \times 10^{-6}$ | m^2/s |

8.6 SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE GENERALE DELLA CONDUZIONE

Strato piano semplice

Si consideri uno strato piano semplice (Figura 8.5) in regime stazionario e senza generazione interna di calore. Lo strato considerato sia di spessore finito s [m] e alla superficie delle due facce si sono misurate le due temperature T_1 e T_2 ($T_1 > T_2$). Per esso valgono quindi le seguenti ipotesi:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = 0 \quad H = 0$$

Inoltre per il materiale considerato si possa ragionevolmente supporre λ indipendente dalla temperatura: Nel caso indicato vale la relazione (8.14):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

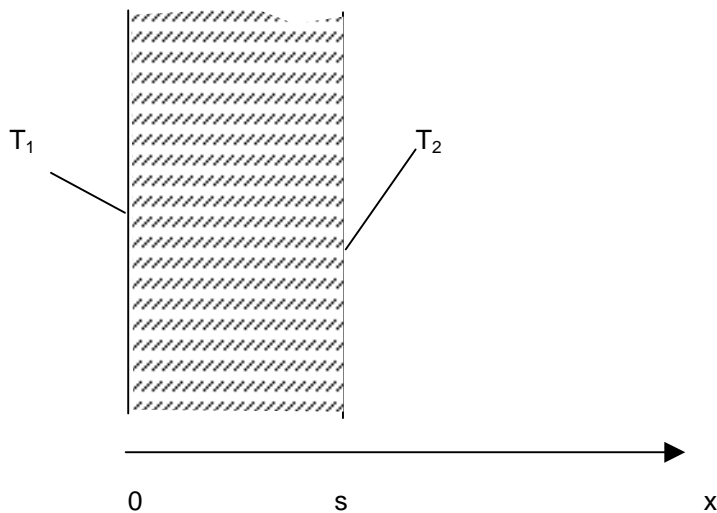


Figura 8.4: Strato piano semplice

Per una tale configurazione geometrica, nell'ipotesi che lo strato sia indefinitamente esteso nelle direzioni y e z , posso ritenere:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (8.15)$$

La temperatura dipende solamente dalla variabile x ; posso pertanto scrivere:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad (8.16)$$

che risolta permette di ottenere:

$$T(x) = C_1 x + C_2 \quad (8.17)$$

Fissati i seguenti valori per le condizioni al contorno (di primo tipo sulla temperatura):

$$\begin{array}{lll} x = 0 & \Rightarrow & T = T_1 \\ x = s & \Rightarrow & T = T_2 \end{array}$$

ottengo il seguente andamento della temperatura:

$$T = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{s} \cdot x \quad (8.18)$$

L'andamento della temperatura è pertanto rettilineo: la Figura 6 riporta l'andamento della temperatura nello strato e la direzione del flusso termico. Per il *flusso termico specifico* q^* , per la Legge di Fourier, è valutabile da:

$$q^* = -\lambda \frac{dT}{dx} = \frac{\lambda}{s} \cdot (T_1 - T_2) \quad (8.19)$$

L'espressione (8.19) può essere scritta in modo leggermente differente:

$$q^* = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{s}{\lambda}} = \frac{(T_1 - T_2)}{R_{t,cond}} \quad (8.20)$$

Nell'espressione (8.20) con $R_{t,cond}$ è stata indicata, in analogia con la legge di OHM per le reti resistive elettriche, la **resistenza termica di conduzione**:

$$R_{t,cond} = \frac{s}{\lambda} \quad (8.21)$$

La resistenza termica alla conduzione di uno strato si misura in $[K \text{ m}^2 / W]$. Minore risulta la conducibilità termica del materiale λ , maggiore risulta la resistenza termica dello strato. La resistenza termica cresce in modo proporzionale allo spessore dello strato. Dall'espressione (8.20), è possibile scrivere:

$$R_{t,cond} = \frac{(T_1 - T_2)}{q} \quad (8.22)$$

$$q R_{t,cond} = (T_1 - T_2) \quad (8.23)$$

Ad uno strato piano semplice è riconducibile con buona approssimazione il caso di una parete piana semplice. La soluzione di questo caso trova applicazione nei casi più semplici di strutture edilizie delimitanti spazi abitativi di cui, note le condizioni al contorno, si vogliono determinare i flussi termici conduttivi (e convettivi) dispersi (caso invernale) o guadagnati (caso estivo).

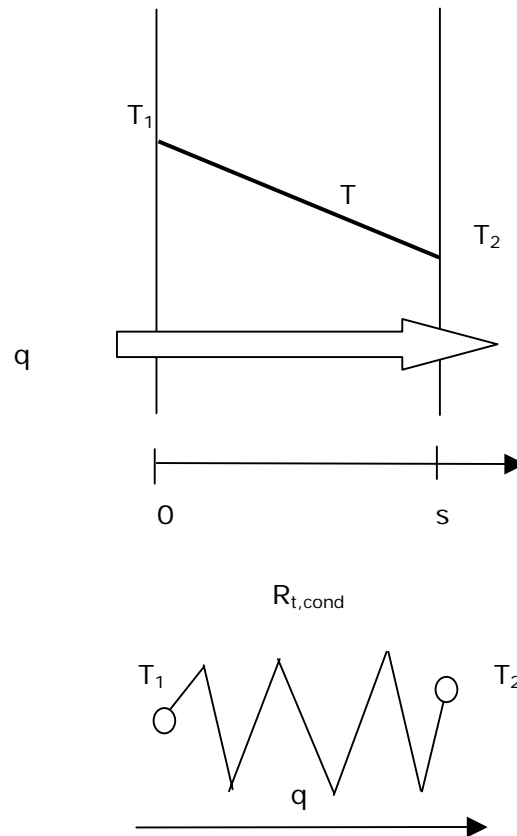


Figura 8.5. Andamento della temperatura in uno strato piano

In generale, per ciascuno strati i -esimo, si può ricavare la relazione:

$$\frac{\Delta T_i}{\Delta T_{tot}} = \frac{R_{t,cond,i}}{R_{totale}} \quad (8.24)$$

In uno strato composto, se la resistenza di un singolo strato è elevata (ad esempio se il materiale è un isolante), la differenza tra le temperature alle estremità dello strato risulta elevata. Di contro là dove la resistenza è bassa, la differenza tra le temperature superficiali è ridotta.

Le relazioni trovate trovano logica applicazione nei casi di pareti piane multistrato.

Bibliografia

- C. Bonacina, A. Cavallini, L. Mattarolo, *Trasmissione del Calore*, Ed. CLEUP, Padova, 1992
- Y.A. Cengel, *Termodinamica e Trasmissione del Calore*, Mc Graw-Hill, 1998
- M.N. Özisik, *Heat Conduction*, J. Wiley & Sons, Inc, Second Edition. 1993
- A. Bejan, *Convective Heat Transfer*, MC Graw Hill
- F. Incropera, D. DeWitt, *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, J. Wiley & Sons, Inc, Third Edition. 1990