3

MECCANICA: MASSA E FORZA

3.1 SUL CONCETTO DI MASSA

La massa può essere definita come proprietà caratteristica di ogni particella, che ne determina il comportamento quando questa interagisce con altre particelle e determina l'entità delle sue interazioni gravitazionali.

Una definizione operativa sfrutta il principio della *bilancia a braccia uguali* (Figura 1): essa consiste in un'asta incernierata al centro in modo da avere due braccia di uguale lunghezza L.

Due corpi hanno uguale massa se, posti sui due piatti ai due capi dell'asta, questa rimane in equilibrio.

Si verifica sperimentalmente che, se la bilancia è in equilibrio in un luogo della terra, essa resta in equilibrio ovunque.

L'uguaglianza della massa è pertanto indipendente dal luogo geografico.

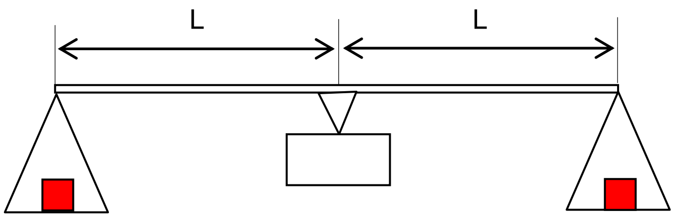


Figura 1: *Bilancia a braccia uguali*

La massa è una grandezza scalare. L'unità di misura della massa nel Sistema internazionale è il kilogrammo [kg]: l'unità di massa è conservata all'Ufficio Internazionale dei Pesi e delle Misure di Sévres (campione primario).

3.1.1. DENSITÀ E VOLUME SPECIFICO

Si definisce densità di un corpo, ρ, il rapporto tra la sua massa, *m*, e il suo volume, *V*; essa quantifica la massa dell'unità di volume.

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{[kg]}{[m^3]}$$

E' utile considerare anche il suo inverso, ossia il volume dell'unità di massa o volume specifico, *v*, rapporto tra il volume, *V*, di un corpo e la sua massa *m*:

$$v = \frac{V}{m} = \frac{[m^3]}{[kg]}$$

Sono entrambe proprietà fisiche delle diverse sostanze ed è facile reperirle in testi e manuali sotto forma di tabelle del tipo:

Sostanza	**densità [kg/m³] (293K)**
aria	1,21
etanolo	783
petrolio	820
olio	910
acqua	1000
boro	2500
alluminio	2700
ferro	7870
piombo	11340
mercurio	13560
oro	19300
platino	21450

3.2 CONSERVAZIONE DELLA MASSA

Tra i principi di conservazione esiste una legge fondamentale, un principio estremamente importante: ***la legge di conservazione della massa***.

Un sistema può essere definito da una superficie fissa o mobile, reale o immaginaria che assume la funzione di *superficie di controllo*. Attraverso di essa è possibile cioè verificare e quantificare i passaggi di massa e i trasferimenti di energia. Applicando il principio di conservazione della massa a un sistema delimitato da una superficie di controllo, detto anche *volume di controllo*, si può pervenire ad una formulazione analitica di questa legge.

Si consideri il sistema Σ di forma qualsiasi rappresentato in figura 2a e delimitato dalla superficie di controllo rappresentata dalla linea a tratti. Attraverso i suoi confini, in particolare le superfici A_i ed A_u, transiti una certa quantità di materia.

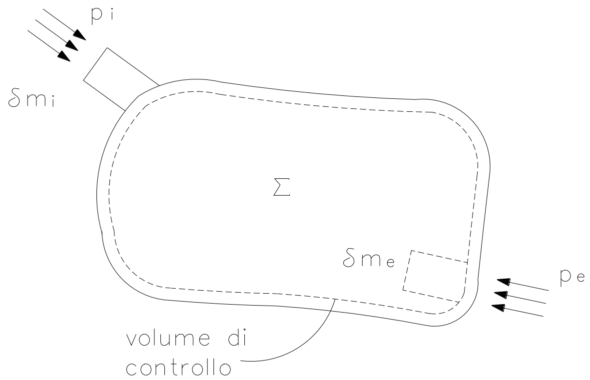


Figura 2a. il sistema Σ all'istante τ

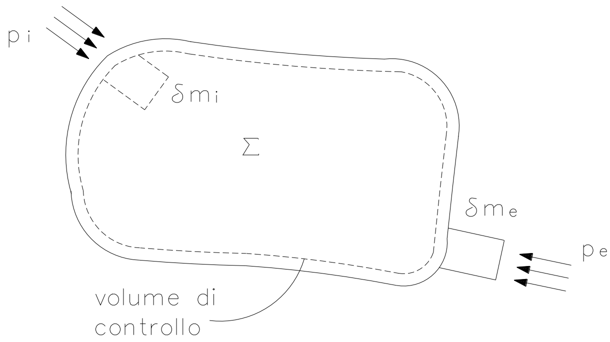


Figura 2 b: il sistema Σ all'istante $\tau + \delta\tau$

Se analizziamo il sistema all'istante τ è possibile definire un volume occupato dalla massa δm_i in ingresso, ovvero dalla massa che nel successivo intervallo temporale $\Delta\tau$ entrerà nel volume di controllo VC. Sempre all'istante τ parte del volume di controllo VC sarà occupato dalla massa $\delta\, m_e$ che nel successivo intervallo temporale $\Delta\tau$ uscirà dal sistema. La figura 4.2b illustra la situazione del sistema Σ all'istante $\tau + \Delta\tau$. All'istante τ, la massa del sistema è costituita dalla massa appartenete al VC e dalla massa δm_{in} entrante:

$$M_{sistema,\ \tau} = m_{VC,\ \tau} + \delta\, m_{in} \qquad (3.1a)$$

All'istante $\tau + \Delta\tau$, la massa del sistema è costituita dalla massa appartenente al VC e dalla massa δm_e uscente:

$$M_{sistema,\ \tau+\Delta\tau} = m_{VC,\ \tau} + \Delta\tau + \delta\ m_i \qquad (3.1b)$$

Per la conservazione della massa deve essere:

$$m_{VC,\ \tau} + \delta\, m_i = m_{VC,\ \tau+\Delta\tau} + \delta\, m_e \qquad (3.2)$$

Ovvero:

$$\delta\, m_i - \delta\, m_e = m_{VC,\ \tau+\Delta\tau} - m_{VC,\tau} \qquad (3.3)$$

e di tale espressione è possibile effettuare la media nel tempo $\Delta\tau$:

$$\frac{\delta m_i - \delta m_e}{\Delta\tau} = \frac{m_{VC,\tau+\Delta\tau} - m_{VC,\tau}}{\Delta\tau} \qquad (3.4)$$

Al tendere a zero dell'intervallo di tempo $\Delta\tau$:

$$\lim_{\Delta\tau\to 0} \frac{\delta m_i - \delta m_e}{\Delta\tau} = \lim_{\Delta\tau\to 0} \frac{\Delta m_{CV}}{\Delta\tau}$$

ovvero:

$$\dot{m}_i - \dot{m}_e = \frac{dm_{CV}}{d\tau} \qquad (3.5)$$

L'espressione 3.5 viene comunemente indicata con il nome di ***equazione di continuità***. Tale espressione può essere estesa agli eventuali molteplici ingressi *i* ed alle uscite *j* del sistema Σ. In tal modo essa viene modificata come segue:

$$\sum_i \dot{m}_{i,i} - \sum_j \dot{m}_{e,j} = \frac{dm_{CV}}{d\tau} \qquad (3.6)$$

L'espressione 3.5 (o 3.6) viene semplificata se il sistema è considerato ***stazionario***, ovvero se lo stato del sistema all'interno del Volume di Controllo VC non dipende dalla variabile tempo τ. L'equazione di continuità diviene pertanto:

$$\sum_i \dot{m}_i = \sum_j \dot{m}_e \qquad (3.7)$$

essendo:

$$\frac{dm_{CV}}{d\tau} = 0 \qquad (3.8)$$

3.3 Sul concetto di forza

Esprimere una definizione di forza è assai semplice dal punto di vista intuitivo: la forza è facilmente associabile all'idea di sollevare o di spingere un corpo.
Si può affermare che è una quantità vettoriale avente modulo e una direzione ben definita.
Un altro concetto chiave è che tale quantità fisica è, in genere, *associata* (applicata) ad un corpo (o ad una particella).
Il concetto di forza è indicato per la prima volta da Isaac Newton (1642- 1727), che enunciò tre leggi dette anche leggi del moto.
Premessa importante: le leggi sono valide se riferite ad un *sistema inerziale* (ovvero non accelerato rispetto alle stelle fisse).

Prima legge

Un corpo permane in uno stato di quiete o di moto rettilineo uniforme (accelerazione nulla) quando è lasciato a se stesso (la risultante delle forze agenti su di esso è nulla):

$$\mathbf{a} = 0 \qquad \text{se} \qquad \mathbf{F}_{ris} = 0 \qquad (3.13)$$

Seconda legge

La forza agente su di un corpo è data dal prodotto della massa del corpo M per la sua accelerazione **a** (grandezza vettoriale)

$$\mathbf{F} = M\,\mathbf{a} \qquad (3.14)$$

Terza legge

Quando due corpi interagiscono, la forza esercitata dal corpo A sul corpo B è uguale ed opposta alla forza esercitata dal corpo B sul corpo A:

$$\mathbf{F}_{AB} = -\,\mathbf{F}_{BA} \qquad (3.15)$$

L'enunciato originale della prima legge, in realtà, affermava che la forza che agisce su di un corpo è pari alla *variazione* rispetto al tempo τ del prodotto della massa M del corpo per la sua velocità **w**.

Il prodotto (M **w**) è detta quantità di moto (**p**: in inglese linear momentum).

Ne consegue che: *una particella libera si muove sempre con quantità di moto costante nel tempo (legge di inerzia o seconda legge di Newton)*. Tale legge è anche nota come principio di conservazione della quantità di moto.

Un osservatore inerziale riconosce se una particella **non** è libera quando egli osserva che la velocità della particella o la sua quantità di moto non è costante: la particella subisce una accelerazione.

Sperimentalmente si osserva che *la quantità di moto (total momentum **P**) di un sistema di particelle isolato è costante*.

Matematicamente, per N corpi o particelle:

$$P = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot w_i = \text{cost} \qquad (3.16)$$

Per due corpi interagenti, la variazione della quantità di moto del corpo A in un certo tempo, è uguale ed opposta alla variazione della quantità di moto del corpo B.

ESEMPIO

Un fucile di massa m_{fucile} = 0,8 kg spara una pallottola di massa m_p = 0,016 kg con una velocità w_p = 700 m/s. Determinare la velocità di rinculo del fucile.

Inizialmente fucile e pallottola sono un sistema (ipotizziamo isolato) in quiete. Dopo l'esplosione, la pallottola si muove con quantità di moto (in modulo):

$$p_p = m_p \cdot w_p = 0{,}016 \cdot 700 = 11{,}2 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

e tale dovrà risultare anche la quantità di moto p_g del fucile.

Ora:

$$p_{fucile} = m_{fucile} \cdot w_{fucile} = 0{,}8 \cdot x$$

Pertanto:

$$x = w_{fucile} = 14{,}0 \text{ m/s}$$

in direzione opposta alla precedente w_b.

Consideriamo ora due particelle A, B in un sistema isolato le cui quantità di moto sono $\mathbf{p}_A$ e $\mathbf{p}_B$ in un determinato istante temporale τ. In un successivo istante $\tau' = \tau + \Delta\tau$, si verifica (conservazione della quantità di moto):

$$\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B = \mathbf{p}'_A + \mathbf{p}'_B \tag{3.17}$$

ovvero:

$$\Delta\mathbf{p}_A = - \Delta\mathbf{p}_B \tag{3.18}$$

Dividendo ambo i termini della precedente relazione per l'intervallo temporale $\Delta\tau$ ($\neq 0$), si ottiene:

$$\frac{\Delta p_A}{\Delta \tau} = -\frac{\Delta p_B}{\Delta \tau} \tag{3.19}$$

e per $\Delta\tau \Rightarrow 0$, al limite otteniamo:

$$\frac{dp_A}{d\tau} = -\frac{dp_B}{d\tau} \tag{3.20}$$

Esprimiamo tale derivata come forza: per il singolo corpo, la forza è pertanto, da un punto di vista fisico, l'esprimersi di una interazione con uno o più corpi o particelle. Matematicamente:

$$F_A = \frac{dp_A}{d\tau} \tag{3.21}$$

Conseguenza: *su di un corpo libero non agiscono forze*.

La forza è il prodotto della massa per l'accelerazione solo se la massa del corpo (o particella) è costante.

La forza che interagisce sulla massa M è la risultante delle diverse forze che interagiscono con essa; ciascuna forza produce una variazione della quantità di moto.

3.3.1 PUNTO DI APPLICAZIONE DI UNA O PIÙ FORZE

Se più forze sono concorrenti (ovvero se sono applicate tutte nel medesimo punto) la forza risultante è la somma vettoriale delle forze applicata nello stesso punto.

Occorre sottolineare che, se una forza **F** agisce su di un corpo C che può ruotare attorno ad un punto O e la retta di azione della forza non passa per il punto O, l'effetto risultante è una rotazione attorno ad O.

L'efficacia della forza, per ciò che riguarda la rotazione, aumenta all'aumentare della distanza b (braccio) tra il punto O di rotazione e la retta di azione della forza (Figura 3).

Ad esempio, l'apertura di una porta richiede una forza maggiore tanto più vicino si è ai cardini.

Si definisce ***momento di una forza*** il vettore τ ottenuto dal prodotto vettoriale:

$$\tau = \mathbf{F} \times \mathbf{r} \quad (3.22)$$

dove **r** è il vettore che unisce il centro di rotazione O con il punto di applicazione della forza F.

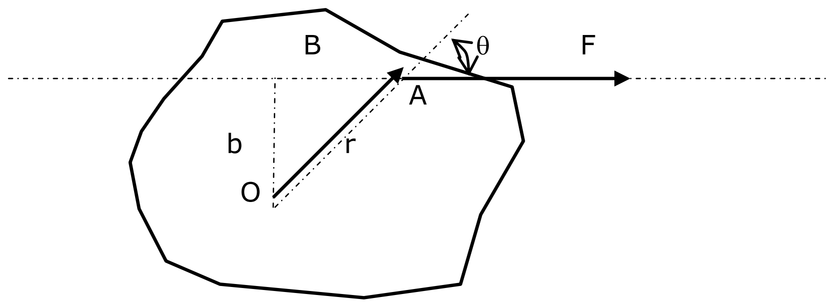


Figura 3: *Momento di una forza*

Il momento è nullo se l'angolo θ tra i due vettori è pari a 0 o a 180° (2π rad) ovvero se forza e braccio sono allineati.

Per quanto riguarda un corpo soggetto ad un campo di forze, riveste un ruolo di particolare importanza il centro di massa (CM): nel caso di un sistema di particelle o di un corpo sottoposto al campo gravitazionale, il centro massa (o baricentro) è il punto di applicazione della forza peso risultante.

3.3.2 CARATTERISTICHE DELLE FORZE

E' preferibile in molti casi distinguere tra forze agenti sulla superficie o sui confini del corpo in oggetto (forze di superficie, *surface forces*) e forze che agiscono sul corpo (*body forces*).

Le prime, quali le forze di attrito o il vincolo di una fune, sono applicate, come detto, sulla superficie di confine del corpo.

Le seconde si presentano quando vi è un campo esterno al corpo in esame (ad esempio il campo gravitazionale).

Una classe di forze assai importante è quella relativa alle *forze conservative*. Una forza è conservativa se tale è la sua dipendenza dal vettore posizione r o dalle coordinate x, y, z da poter definire una grandezza (potenziale) dipendente direttamente dal prodotto della forza per la posizione stessa.

3.4 CENTRO DI MASSA

Ogni particella situata nel campo gravitazionale terrestre è soggetta ad una forza G (peso). La retta di azione di questa forza passa per il centro della terra.

Se la massa del corpo è pari a M, la forza G è pari a:

$$\mathbf{G} = M\,\mathbf{g} \tag{3.9}$$

Per un corpo la forza G può essere determinata dalla conoscenza delle masse infinitesime δm in cui si può supporre diviso:

$$\mathbf{G} = \sum \delta m \cdot \mathbf{g} \tag{3.10}$$

La somma va ovviamente estesa a tutte le particelle facenti parti del corpo.

Il punto di applicazione della forza G può essere determinato dalla relazione:

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum_i \mathbf{r}_i\, \delta m \cdot g}{\sum_i \delta m \cdot g} = \frac{\sum_i \mathbf{r}_i\, \delta m}{\sum_i \delta m} \tag{3.11}$$

come si può ricavare dalla composizione delle singole forze considerate parallele tra loro.

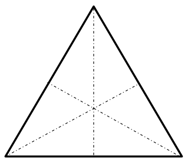
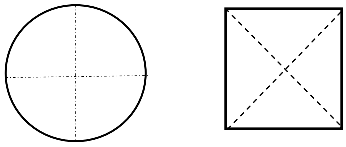
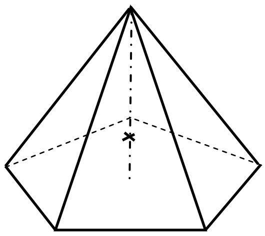
Il punto definito dal vettore $\mathbf{r}_c$ sopra calcolato è detto *centro di massa* del sistema di particelle.

Se è nota la densità ρ delle singole particelle di massa δm, è possibile ricavare la posizione del centro di massa C rispetto ad un sistema di assi cartesiani coordinati x y z, come:

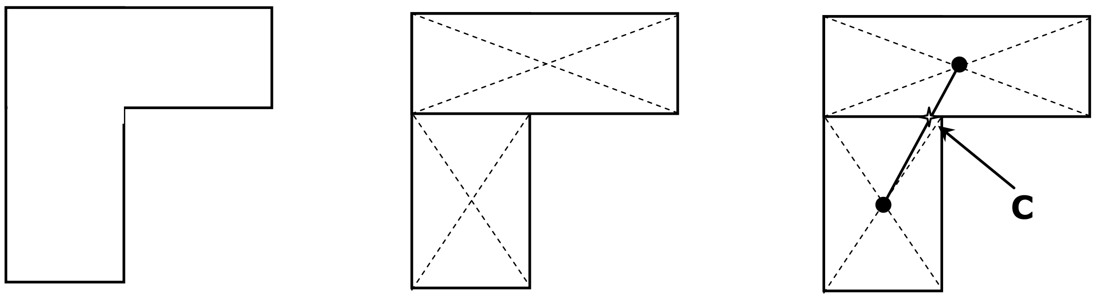
$$x_C = \frac{\int_V \rho \cdot x \cdot dV}{\int_V \rho \cdot dV} \qquad y_C = \frac{\int_V \rho \cdot y \cdot dV}{\int_V \rho \cdot dV} \qquad z_C = \frac{\int_V \rho \cdot z \cdot dV}{\int_V \rho \cdot dV} \tag{3.12}$$

Nella Tabella è riportato per alcune figure geometriche, la posizione del centro di massa.

Il centro di massa può essere ricavato per via geometrica. Se un corpo è decomponibile in parti ci forma semplice, il suo centro di massa può essere ricavato trovando i centri delle parti in cui il solido risulta scomposto e sostituendo, nei centri di massa così trovati, massa concentrate pari a quelle delle singole parti e quindi calcolando il centro di massa del sistema discreto di masse definito.

FIGURA	**POSIZIONE**
	punto di intersezione delle mediane
	centro geometrico
	¼ della lunghezza della congiungente base con il vertice

ESEMPIO
Centro di massa C di una lamina piana a forma di L



3.5 L'EQUILIBRIO DI UN CORPO RIGIDO

Quando un corpo rigido è sottoposto all'azione di diverse forze, è necessario considerare le condizioni di equilibrio sia rispetto ad una traslazione che rispetto ad una rotazione.

Equilibrio traslazionale

La somma di tutte le forze agenti *deve* essere uguale a zero

$$\sum_{i=1}^{N} F_i = 0 \qquad (3.23)$$

Equilibrio rotazionale

La somma dei momenti di tutte le forze rispetto ad un punto qualsiasi

$$\sum_{i=1}^{N} \tau_i = 0 \tag{3.24}$$

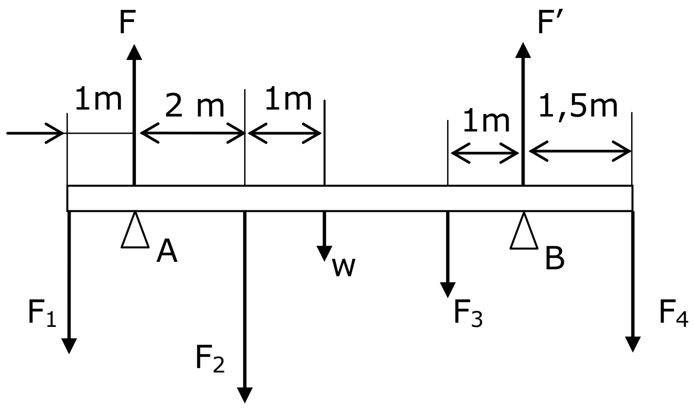
Le due condizioni devono essere soddisfatte contemporaneamente.

ESEMPIO

*Sia data la trave (l = 8 m) di figura. Essa è dotata di peso **W** = 40 N (agente nel Centro di Massa) e soggetta alle forze indicate:*

F_1 = 240 N; F_2 = 400 N; F_3 = 120 N; F_4 = 300 N

Determinare i valori delle forze F ed F' agenti sui punti di appoggio A e B affinché la trave in oggetto possa ritenersi in equilibrio.



Affinché la trave possa dirsi in l'equilibrio, è necessario che siano soddisfatte le relazioni esposte (equilibrio traslazionale e rotazionale).

La prima condizione è riconducibile alla relazione matematica:

$$\sum_{i=1}^{N} F_i = F + F' + F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + W = 0$$

ovvero: F + F' - 240 - 400 - 120 - 300 - 40 = 0

F + F' = 1100 N

La seconda condizione è l'equilibrio dei momenti (ad es. rispetto a B):

$$\sum_{i=1}^{N} \tau_i = F_4 \cdot 1{,}5 + F' \cdot 0 - W \cdot 2{,}5 - F_2 \cdot 3{,}5 + F \cdot 5{,}5 - F_1 \cdot 6{,}5 = 0$$

da cui si ricava: F = 496,4 N

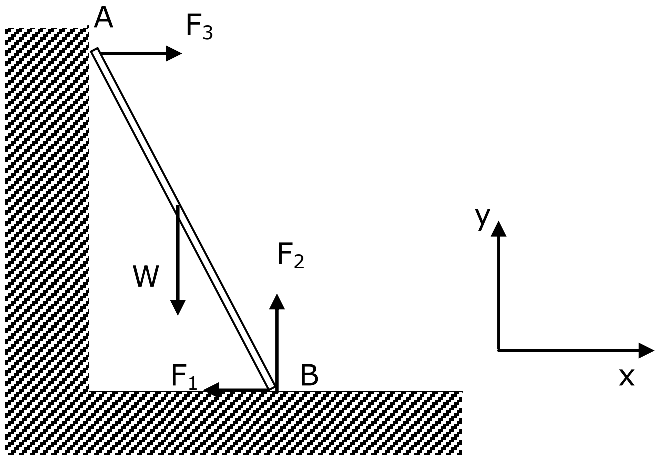
F' = 603,6 N

Lo stesso risultato si può ricavare applicando l'equilibrio dei momenti rispetto al punto A.

ESEMPIO

*La scala AB di figura pesa **W** = 40 N e forma un angolo di 60° con il pavimento. Determinare il valore delle forze che agiscono in A e B.*

Si consideri l'attrito in A trascurabile.



La forza $\mathbf{F}_1$ in B è necessaria ad impedirne lo slittamento ed originata dall'attrito sul pavimento.

Le forze $\mathbf{F}_2$ e $\mathbf{F}_3$ sono le reazioni del pavimento e della parete verticale.

Usando le condizioni di equilibrio alla traslazione, nelle direzioni x e y, si può ottenere (in modulo):

$F_3 - F_1 = 0$ direzione x

$- W + F_2 = 0$ direzione y

Detta L la lunghezza della scala, l'equilibrio dei momenti rispetto al punto B, comporta:

$$W \cdot \frac{L}{2} \cdot \cos(60^\circ) - F_3 \cdot L \cdot \sin(60^\circ) = 0$$

ovvero: $$F_3 = \frac{W \cdot \cos(60^\circ)}{2 \cdot \sin(60^\circ)} = \frac{40 \cdot 0{,}5}{2 \cdot 0{,}866} = 11{,}55 N$$

Quindi: $F_1 = 11{,}55$ N

$F_2 = 40$ N

$F_3 = 11{,}55$ N

3.6 L'ATTRITO

3.6.1 FORZE DI ATTRITO NEI SOLIDI

Ogni volta che due corpi sono in contatto, si manifesta una resistenza al moto relativo tra i due corpi. Tale resistenza si manifesta come una diminuzione della quantità di moto ed è indicativa di una forza che si oppone al moto: tale forza è chiamata attrito.

L'interazione tra le molecole dei due corpi ne è la causa; tra i fattori che ne influenzano la variabilità, la velocità relativa, la natura e lo stato delle superfici a contatto.

La forza di attrito è proporzionale alla forza N normale che spinge i corpi uno a contatto dell'altro, secondo un fattore di proporzionalità f detto fattore di attrito. In modulo:

$$F_a = f\,N \qquad (3.25)$$

La forza di attrito ha direzione del moto del corpo ed è orientata nel verso opposto.

In generale è possibile distinguere tra l'attrito statico (coefficiente di attrito f_s) e l'attrito dinamico (coefficiente di attrito f_d).

Il primo corrisponde alla forza minima necessaria per porre in moto relativo due corpi inizialmente in contatto ed in quiete; il secondo corrisponde alla forza necessaria per mantenere i corpi in moto relativo uniforme.

Materiale	$\mathbf{f_s}$	$\mathbf{f_d}$
acciaio su acciaio (duro)	0,78	0,42
acciaio su acciaio (dolce)	0,74	0,57
piombo su acciaio (dolce)	0,95	0,95
rame su acciaio	0,53	0,36
nichel su nichel	1,10	0,53
ghisa su ghisa	1,10	0,15
teflon su teflon	0,04	0,04

In realtà la forza di attrito rappresenta la somma di tutte le forze di interazione tra le molecole dei due corpi a contatto: la loro rappresentazione macroscopica non può che avvenire in modo approssimato.

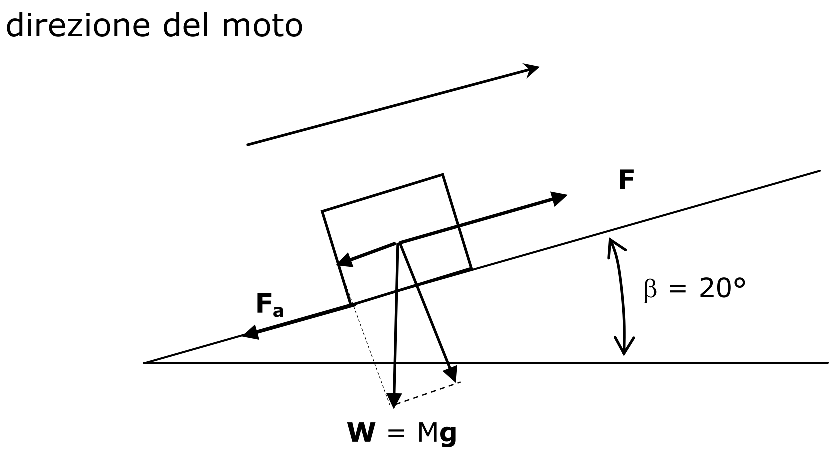
ESEMPIO

Un corpo di massa M = 2,5 kg si trova su di un piano inclinato di β = 20°. Quale forza si deve applicare in modo che esso si muova:

a) verso l'alto; b) verso il basso

Ipotesi: in entrambi i casi, il moto è uniforme e l'accelerazione a = 0,2 m/s^2. Il coefficiente di attrito dinamico è pari a f_d = 0,3.

caso a)



La forza peso W = M g , applicata al baricentro del corpo, può essere considerata scomposta in due componenti, una parallela al piano inclinato, l'atra ad esso perpendicolare.

Caso a)

Il moto lungo il piano inclinato è ricavabile dall'applicazione della seguente equazione:

$$\Sigma_i F_i = M a$$

ovvero:

$$F - W \sin \beta - F_a = M a$$

Poichè: $F_a = f_d N = f_d W \cos \beta = M f_d g \cos \beta$

si ottiene: $F - M g \sin \beta - M f_d g \cos \beta = M a$

La forza da applicare risulta la seguente:

$$F = M [a + g (\sin \beta + f_d \cos \beta)]$$

Se il moto è uniforme: a = 0 e pertanto:

$$F = M [g (\sin \beta + f_d \cos \beta)] = 15,3 \text{ N}$$

Caso b)

In questo secondo caso, la relazione ottenibile dall'applicazione delle forze è la seguente:

$$F + M\, g \sin \beta - M\, f_d\, g \cos \beta = M\, a$$

La forza da applicare risulta ora la seguente:

$$F = M\, [a - g\, (\sin \beta - f_d \cos \beta)]$$

Se il moto è uniforme: a = 0 e pertanto:

$$F =- M\, [g\, (\sin \beta - f_d \cos \beta)] = 1{,}48\ N$$

3.6.2 L'ATTRITO NEI FLUIDI

Nel caso del moto di un corpo in un fluido, gas o liquido, la forza di attrito si può approssimare con la seguente relazione:

$$\mathbf{F_a} = - K\, \eta\, \mathbf{w} \qquad (3.26)$$

K = coefficiente dipendente dalla forma del corpo [m].

Per una sfera: $K = 6\, \pi\, r$ (r = raggio)

η = coefficiente di viscosità (viscosità dinamica) [kg /(m s)].

w = velocità del corpo [m/s]

Il coefficiente di viscosità dei liquidi diminuisce all'aumentare della temperatura; nel caso dei gas, tale coefficiente aumenta all'aumentare della temperatura.

Quando un corpo di massa M si muove attraverso un fluido viscoso sotto l'azione di una forza **F**, l'equazione del moto è:

$$M\, \mathbf{a} = \mathbf{F} - K\, \eta\, \mathbf{w} \qquad (3.27)$$

Se la forza **F** è costante, l'accelerazione produce un aumento continuo della velocità **w** ed un corrispondente aumento dell'attrito, finché ad un certo punto il termine di destra dell'equazione diventa nullo.

In questa situazione anche l'accelerazione **a** è nulla e l'attrito è controbilanciato dalla forza applicata **F**. La velocità (velocità *limite*) è quindi costante e pari a:

$$\mathbf{w_L} = \mathbf{F}/(K\, \eta) \qquad (3.28)$$

Se **F** = M **g**, si ottiene:

$$\mathbf{w_L} = M\, \mathbf{g} \,/\, (K\, \eta) \qquad (3.29)$$

La relazione sopra deve però essere corretta dalla spinta idrostatica **A** esercitata dal fluido.

La spinta **A** è pari al peso del fluido spostato dal corpo (*principio di Archimede*):

$$\mathbf{A} = - \rho_f\, V\, \mathbf{g} \qquad (3.30)$$

essendo la massa del fluido $m_f = \rho_f V$; **A** ha direzione opposta alla forza peso W del corpo.

Per la velocità limite, in modulo, si ottiene come:

$$w_L = \frac{(\rho - \rho_f)\,V\,g}{K\,\eta} \tag{3.31}$$

ESEMPIO

Determinare la velocità limite di una goccia di pioggia.

Si ipotizzi che la goccia abbia forma sferica e raggio r = 0,001 m e che il coefficiente di viscosità è η = 1,81 x 10^{-5} kg/(m s)

Acqua = 1000 kg/ m^3 *Aria = 1,2 kg/ m^3*

Il volume della sfera è pari a: $V = 4\,\pi\,r^3/3$

Il coefficiente di forma K: $K = 6\,\pi\,r$

Pertanto:

$$w_L = \frac{(\;-\;_f)\,V\,g}{K} = \frac{(1000-1{,}2)\cdot 4\;\;\cdot r^3\cdot 9{,}81}{6\;\;\cdot r\cdot 3\cdot 1{,}81\cdot 10^{-5}} = \frac{998{,}8\cdot 10^{-1}\cdot 2\cdot 9{,}81}{9\cdot 1{,}81} = 120{,}3\,\mathrm{m/s}$$

3.7 DINAMICA DI UN CORPO RIGIDO

Dato un corpo di massa M, si definisce momento della quantità di moto L la grandezza vettoriale:

$$\mathbf{L} = M\,(\mathbf{r} \times \mathbf{w}) \tag{3.32}$$

in cui **r** è il vettore posizione e **w** il vettore velocità.

L pertanto è un vettore perpendicolare al piano di r e w. Il momento della quantità di moto cambia in generale in modulo e direzione mentre la particella è in moto.

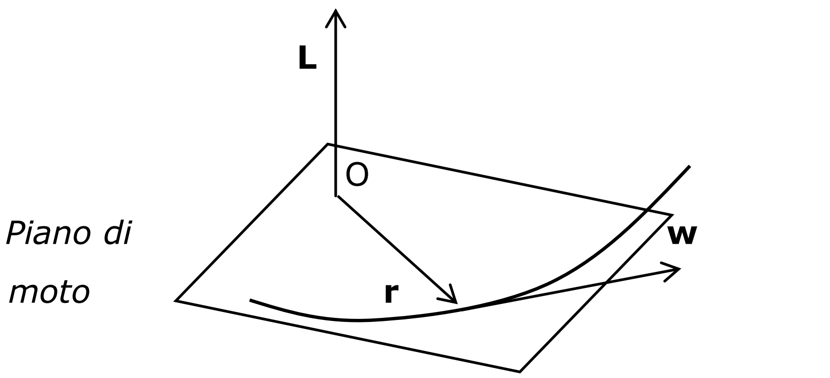


Figura 4: *Piano di moto: velocità e momento della quantità di moto*

Nel caso di un moto circolare, essendo $w = \omega\,r$, si ha, in modulo:

$$L = M\,r^2 w \tag{3.33}$$

La derivata rispetto al tempo del momento della quantità di moto di un corpo è pari al momento τ della forza ad esso applicata.

Infatti:

$$\frac{d\mathbf{L}}{d\tau} = M\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{w} + \mathbf{r} \times M\frac{d\mathbf{w}}{d\tau} = 0 + \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \tau \qquad (3.34)$$

essendo d**r**/dt = **w** (parallelo a **w** stesso) e τ è pari al momento per definizione.

Per quanto riguarda un corpo rigido è possibile riconoscere due tipi fondamentali di moto: la traslazione e la rotazione.

Il moto è una traslazione quando tutte le particelle descrivono traiettorie parallele: un segmento che unisce due punti qualsiasi del corpo rimane sempre parallelo alla sua direzione iniziale.

Il moto è una rotazione attorno ad un asse quando tutte le particelle descrivono traiettorie circolari attorno ad una retta chiamata asse di rotazione; l'asse può essere fisso o cambiare direzione durante il movimento del corpo.

In generale il moto di un corpo rigido può essere una combinazione dei due.

Il moto del centro di massa del corpo è uguale al moto di una particella la cui massa è pari alla massa del corpo e soggetta ad una forza pari alla somma di tutte le forze esterne applicate al corpo:

$$M\frac{dw}{dt} = F_{esterne} \qquad (3.35)$$

t = tempo;

M = massa del corpo;

w = velocità del corpo;

$F_{esterne}$ = somma delle forze esterne agenti sul corpo.

Rotazione

Consideriamo un corpo che ruota attorno ad un suo asse con velocità angolare ω, richiamando la definizione precedente di momento della quantità di moto L e la definizione di velocità angolare:

$$\mathbf{L} = I\omega \qquad (3.36)$$

in cui I risulta essere il momento di inerzia rispetto all'asse generico di rotazione.

Il momento di inerzia è pari a:

$$I = \int \rho\, r^2\, dV \qquad (3.37)$$

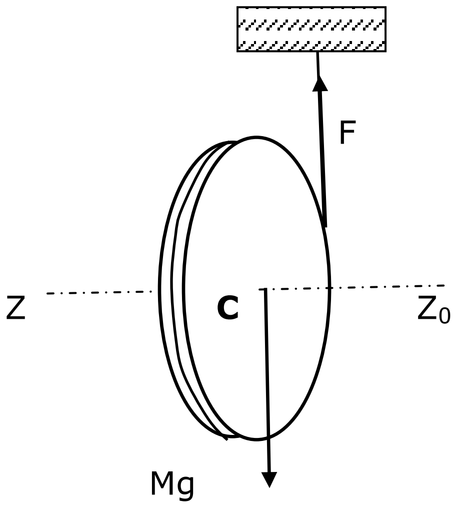
r è la distanza dei singoli volumi elementari dV dall'asse di rotazione;

ρ è la densità del materiale.

Solo se il corpo è omogeneo la densità è costante ed il momento di inerzia si riduce ad un fattore geometrico uguale per tutti i corpi di uguale dimensione.
Poiché il momento delle forze esterne applicate al sistema é pari alla variazione del momento della quantità di moto L, si ha che:

$$I \frac{d\omega}{dt} = \tau \tag{3.38}$$

ovvero $I\ \alpha = \tau$
essendo α = accelerazione angolare.
Si noti che, se $\tau = 0$, $I\ \omega$ è costante e, se il momento di inerzia è costante, anche ω è costante. Un corpo rigido che ruota attorno ad un asse principale si muove con velocità angolare costante quando non sono applicati momenti esterni (legge di inerzia per il moto rotatorio).



ESEMPIO
Determinare l'accelerazione angolare del disco di figura e l'accelerazione verso il basso del suo baricentro.
L'asse di rotazione è il piano Z-Z_0. Il baricentro del disco coincide con il centro della circonferenza.

Le forze esterne applicate al disco, nell'ipotesi di una fune senza peso, sono la forza peso Mg (centro di massa C) e la reazione della corda F.
Momento di Mg rispetto a C è nullo
Momento di F rispetto a C è pari a $\tau = F \cdot r$
Pertanto la legge di inerzia per la rotazione porge:

$$I\ \alpha = F\ r$$

essendo $I = ½\ M\ r^2$
Moto verso il basso del centro di massa per la legge di Newton:

$$Mg - F = M a = M r \alpha$$

si ottiene per $a = 2 g/3 = 6{,}53 \text{ m s}^{-2}$ indipendente dalla massa del disco e dalle sue dimensioni.

BIBLIOGRAFIA

M. Alonso, E.J. Finn, *Elementi di Fisica*, Vol. 1, Inter European Editions, 1974

A. Baracca, M. Fischetti, R. Rigatti, *Fisica e realtà*, Vol.2, Ed. Cappelli, 1999