2

MECCANICA: IL MOTO

INTRODUZIONE

La meccanica studia il moto dei corpi: essa spiega quale relazione esiste tra le cause che generano il moto e le caratteristiche del moto, esprimendo tale relazione attraverso leggi quantitative.
La parte della meccanica che descrive il moto di un corpo, indipendentemente dalle cause che lo determinano, è detta CINEMATICA.
La parte della meccanica che si occupa delle cause del moto si chiama DINAMICA.
In questo capitolo verrà trattata la descrizione di alcune tipologie di moto dal punto di vista della cinematica.

2.0 GRANDEZZE CHE CARATTERIZZANO IL MOTO

Nel descrivere il moto e le grandezze che lo caratterizzano faremo riferimento ad un modello semplice di corpo che prende il nome di *punto materiale*: si tratta di un corpo privo di dimensioni o di dimensioni trascurabili rispetto a quelle dello spazio in cui può muoversi. Il riferimento a tale modello rende la trattazione dell'argomento più semplice; inoltre alcune grandezze fisiche intervengono nel moto in modo indipendente dall'oggetto che si muove, dalla sua forma e dalle sue dimensioni: tali grandezze sono tipiche del movimento. Esse sono: posizione, spostamento, traiettoria, tempo, velocità, accelerazione. Trascurando il tempo, il cui concetto è noto a tutti, si darà in breve una spiegazione delle prime tre grandezze, mentre per la definizione delle ultime due saranno dedicati i paragrafi successivi.
Il riferimento alla *posizione* si trova nella stessa definizione di moto: "Un punto materiale è in movimento quando, col passare del tempo, occupa *posizioni* diverse rispetto ad un osservatore". Da questa definizione si ricava che posizione e movimento sono concetti relativi, poiché per avere significato devono avere preciso riferimento rispetto al tempo e allo spazio. Più precisamente la posizione di un punto in un preciso istante temporale può essere definita solo all'interno di un *sistema di riferimento*. Un esempio di sistema di riferimento è rappresentato dal ben noto sistema cartesiano ad assi ortogonali. Ora, se la posizione di un punto varia al variare del tempo si dice che il punto ha compiuto uno *spostamento*. Ed infine, la curva continua nello spazio che rappresenta la successione delle posizioni che un corpo occupa nel suo spostamento è detta *traiettoria*. Se la traiettoria è una linea retta il moto si dice rettilineo; se la

traiettoria è una linea curva il moto è detto curvilineo; se è una circonferenza, il moto è detto circolare.

Si tenga presente infine che per definire in modo completo il movimento di un corpo è necessario conoscere la relazione che intercorre tra le successive posizioni occupate dal corpo in movimento e gli intervalli di tempo trascorsi dall'istante della partenza. Questa relazione viene chiamata *legge oraria* o *legge del moto* e può essere rappresentata su un piano cartesiano con il tempo in ascissa e lo spostamento in ordinata.

2.1 VELOCITÀ

La posizione di un corpo nello spazio può essere individuata mediante un vettore **s**, che fissato un sistema di riferimento (ad esempio un sistema di assi cartesiani ortogonali) ne congiunga l'origine con il corpo stesso. Se il corpo è fermo la sua posizione è indipendente dal tempo, ma se il corpo è in movimento anche il vettore **s** sarà funzione del tempo.

Sia P un punto la cui posizione (funzione del tempo) è individuata dal vettore **s**; in particolare nell'istante τ_1 il punto si trova nella posizione P_1 individuata da $\mathbf{s_1}$ e nell'istante successivo τ_2 il punto si trova nella posizione P_2 individuata da $\mathbf{s_2}$. Lo spostamento del punto P dalla posizione iniziale alla posizione finale è avvenuto in un intervallo di tempo $\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1$.

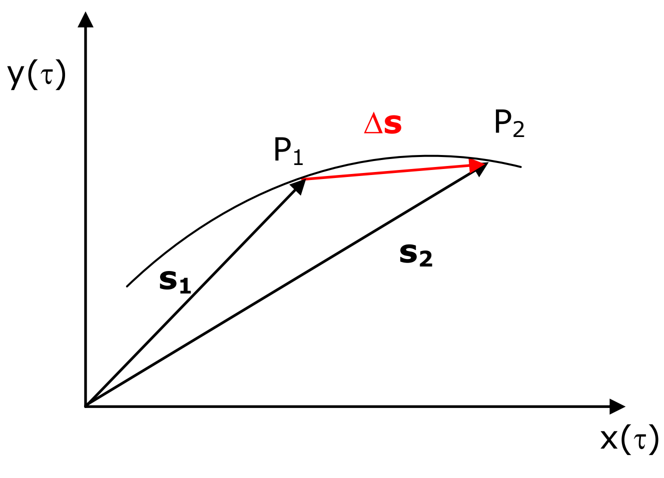

Figura 1: *Rappresentazione dello spostamento*

La grandezza che fornisce delle indicazioni sulla rapidità del movimento di P lungo la sua traiettoria è il vettore velocità. Si definisce velocità media $\mathbf{v_m}$ il rapporto:

$$\mathbf{v_m} = (\mathbf{s_2} - \mathbf{s_1}) / (\tau_2 - \tau_1) \qquad (2.1)$$

Si definisce come velocità istantanea **v** la velocità media quando l'intervallo di tempo $\Delta\tau$ è molto piccolo, istantaneo, tendente a zero; pertanto:

$$v = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta \tau} = \frac{d\vec{s}}{d\tau} \qquad (2.2)$$

Matematicamente possiamo dire che la velocità è la derivata prima della funzione **s** = **s**(τ), dello spazio rispetto al tempo. Dal momento che la derivata di una funzione in un punto è la tangente della funzione in quel punto, la velocità istantanea è un vettore tangente alla funzione **s** = **s**(τ) nel punto P considerato. Tale vettore avrà come modulo quello dato dal calcolo della derivata, come direzione quella della tangente alla traiettoria nel punto e come verso, quello del moto. Ovviamente per la velocità valgono le regole di composizione dei vettori brevemente presentate nel capitolo 0.

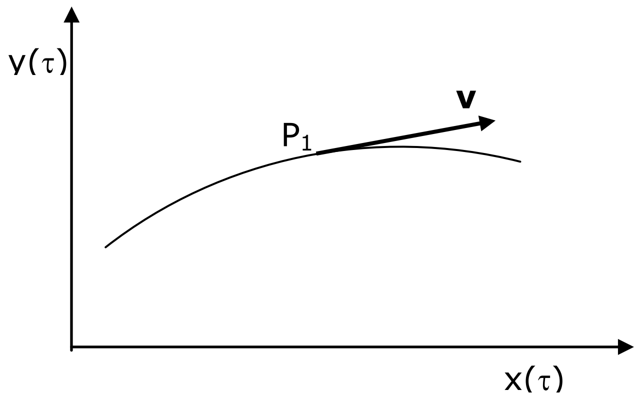

Figura 2: *Rappresentazione della velocità*

Se la velocità è costante e la direzione rettilinea il moto conseguente si dice *Rettilineo e uniforme*.

Si chiama, invece, moto Circolare uniforme il moto di un punto la cui traiettoria sia circolare e la cui velocità, **v**, abbia modulo costante nel tempo. In questo caso lo spazio percorso si può determinare tramite l'angolo, dΦ, misurato rispetto ad un raggio di riferimento; risulta cioè:

ds = R dΦ, dove R è il raggio della traiettoria circolare.

Dalla definizione di velocità istantanea si ottiene:

$$v = \frac{d\Phi}{d\tau} \cdot R = \omega \cdot R \qquad (2.3)$$

dove ω viene chiamata velocità angolare e si misura in radianti/secondo [rad/s].

2.2 Accelerazione

Si definisce accelerazione istantanea la derivata rispetto al tempo del vettore velocità:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta \bar{\tau}} = \frac{d\bar{v}}{d\bar{\tau}} = \frac{d^2 \vec{s}}{d\tau^2} \qquad (2.4)$$

Come si vede dalla definizione l'accelerazione si misura in m/s^2. In base alla definizione un corpo subisce una accelerazione quando la sua velocità varia nel tempo. Tuttavia bisogna prestare attenzione perché la velocità è un vettore e può cambiare non solo modulo, ma anche direzione e verso. Facciamo un esempio: una macchina si muove lungo una pista circolare. Il contachilometri indica sempre la stessa velocità. Possiamo allora dire che l'accelerazione della macchina è nulla? Naturalmente no, perché, la velocità della macchina non varia in modulo, ma varia in direzione e verso e di conseguenza sarà anche soggetta ad un'accelerazione che viene detta, in questo caso centripeta. Il vettore accelerazione è infatti scomponibile in due termini in questo modo:

$$\vec{a} = \frac{dv}{d\tau}\vec{\mathrm{T}} + \frac{v^2}{r}\vec{\mathrm{N}} \qquad (2.5)$$

dove il primo termine si riferisce al caso in cui la velocità cambia solo in modulo, ma non in direzione e verso. Con **T** è indicato il vettore unitario (o versore) che indica la direzione ed il verso della accelerazione lineare. Il secondo termine è l'accelerazione centripeta dove v è la velocità (in modulo) del punto mobile, r il raggio della curva e **N** un versore rivolto verso il centro di curvatura. Quando il primo termine è nullo il moto è detto *Circolare uniforme*.

2.3 MOTI RETTILINEI

Moto rettilineo uniforme

Quando la velocità media di un corpo in movimento coincide con la velocità istantanea il moto del corpo è detto **uniforme**. Tale moto è il più semplice e regolare e la sua legge oraria può essere scritta facilmente in forma analitica se si considera che:

$$v = v_m \qquad (2.6)$$

ossia:

$$v = \frac{s - s_0}{\tau - \tau_0} \qquad (2.7)$$

Da cui:

$$s = v\,(\tau - \tau_0) + s_0 \qquad (2.8)$$

che è la legge oraria del moto uniforme.

Ponendo $s_0=0$ e $\tau_0=0$, il che equivale, in pratica, ad azzerare il cronometro nell'istante (che è l'istante in cui iniziamo ad osservare il moto) e a misurare le distanze dalla posizione iniziale del punto mobile sulla traiettoria, la legge oraria diventa:

$$s = v\,\tau \qquad (2.9)$$

dove si deduce che nel moto uniforme lo spazio percorso è direttamente proporzionale al tempo impiegato. Il grafico che rappresenta la legge oraria è una retta passante per l'origine, la cui inclinazione è tanto maggiore quanto maggiore è la velocità.

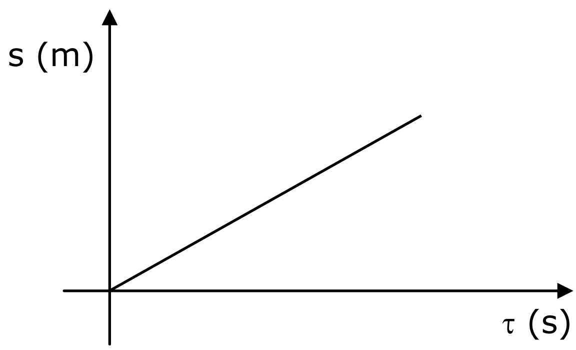

Figura 3: *Moto rettilineo uniforme*

Se la traiettoria seguita dal corpo in movimento è rettilinea allora si parla di **moto rettilineo uniforme**, che di tutti i moti è il più semplice e regolare.

Si tenga presente che la legge oraria vista sopra è valida per qualunque moto uniforme, anche non rettilineo.

Moto rettilineo uniformemente accelerato

Se l'accelerazione media di un corpo è costante e quindi coincide con l'accelerazione istantanea, allora il moto si dice uniformemente accelerato e:

$a_m = a_{ist} = \Delta v/\Delta\tau$

Vediamo qual è la legge oraria di questo moto. A questo scopo riscriviamo la equazione precedente nella seguente forma:

$$\Delta v = a\,\Delta\tau \qquad (2.10)$$

ossia:

$$v - v_0 = a\,(\tau - \tau_0) \qquad (2.11)$$

dove v_0 è la velocità iniziale cioè la velocità nell'istante τ_0; oppure anche, posto $\tau_0 = 0$, si ha:

$$v = a\tau + v_0 \qquad (2.12)$$

Quest'ultima uguaglianza può essere rappresentata per mezzo di una retta nel piano v τ.

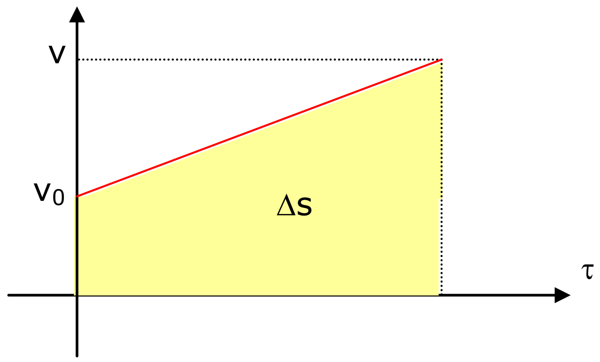

Figura 4: *Rappresentazione della velocità*

Se la velocità fosse costante, lo spazio Δs percorso sarebbe dato dall'area del rettangolo di lati pari a v e a τ, in accordo con la relazione $\Delta s = v\,\tau$.

Per analogia, possiamo allora pensare di esprimere Δs nel moto uniformemente accelerato attraverso l'area del trapezio mostrato in figura, che ha per basi v e v_0 e per altezza τ, ossia:

$$\Delta s = \frac{1}{2}(v + v_0)\cdot\tau \qquad (2.13)$$

ricordando che $\Delta s = s - s_0$, e che $v = a\,\tau + v_0$ possiamo scrivere:

$$s - s_0 = \frac{1}{2}(a\,\tau + 2v_0)\cdot\tau \qquad (2.14)$$

da cui infine otteniamo:

$$s = \frac{1}{2}a\,\tau^2 + v_0\tau + s_0 \qquad (2.15)$$

che è la legge oraria del **moto rettilineo uniformemente accelerato**. Questa legge è rappresentata da un arco di parabola (figura 5), il cui vertice, nel caso in cui nell'istante iniziale $\tau_0=0$ siano anche $v_0=0$ e $s_0=0$, coincide con l'origine degli assi:

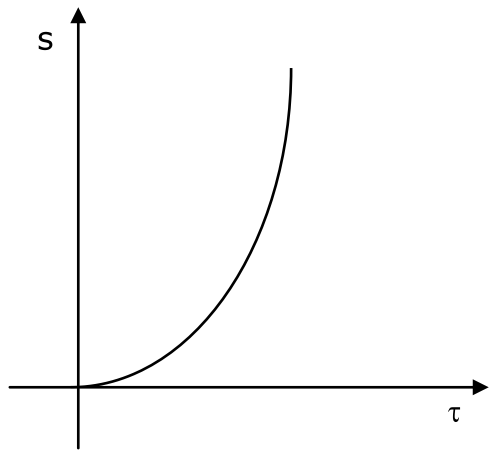

Figura 5: *Moto rettilineo uniformemente accelerato.*

2.4 MOTI CURVILINEI

Fra i moti curvilinei il più semplice è il moto circolare uniforme, ossia il moto di un punto che descrive una circonferenza con velocità costante. Se indichiamo con P il periodo, ossia il tempo impiegato dal punto mobile a percorrere un intero giro, e con R il raggio della circonferenza, la velocità è data da:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta \tau} = \frac{2\pi R}{P} \qquad (2.16)$$

Come si vede, la velocità, detta anche velocità periferica, a parità di periodo, è proporzionale al raggio: di due punti A e B di un disco rotante avrà velocità maggiore quello che è più lontano dal centro di rotazione. Tuttavia entrambi i punti in tempi uguali descrivono lo stesso angolo $\Delta\vartheta$; questo fatto suggerisce di introdurre la velocità angolare ω, definita come rapporto tra l'angolo descritto dal punto mobile ed il tempo impiegato a descriverlo:

$$\omega = \frac{\Delta \vartheta}{\Delta \tau} \qquad (2.17)$$

Dalla definizione, segue che l'unità di misura della velocità angolare è il rad/s.
Poiché un angolo giro è pari a 2π rad, ricaviamo dalla definizione di periodo la seguente espressione per la velocità angolare:

$$\omega = \frac{2\pi}{P} \qquad (2.18)$$

infine, confrontando le due relazioni si ricava la velocità periferica in funzione della velocità angolare:

$$v = \omega R \qquad (2.19)$$

Per descrivere il moto curvilineo sono indispensabili i vettori; in particolare:

a) il vettore velocità è tangente alla traiettoria e il suo modulo è pari alla velocità istantanea;
b) il vettore accelerazione può essere scomposto in due componenti una tangente alla traiettoria, detta accelerazione tangenziale e una perpendicolare alla traiettoria detta accelerazione normale; se il moto avviene con velocità costante, l'accelerazione tangenziale è nulla e quindi il vettore accelerazione risulta perpendicolare alla traiettoria;
c) l'accelerazione normale dipende dalla velocità con cui viene percorsa la traiettoria e dalla sua curvatura.

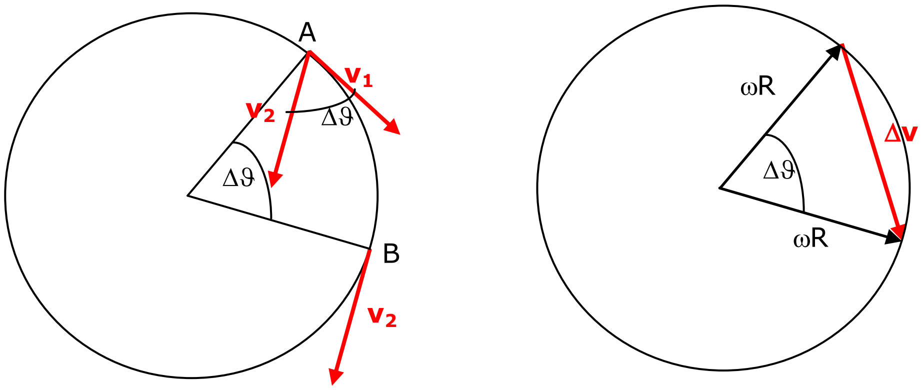

Figura 6: *Moto curvilineo*

La velocità angolare può essere espressa come una grandezza vettoriale; seguendo la notazione vettoriale si ha:

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r} \qquad (2.20)$$

Da queste considerazioni, segue che nel moto circolare uniforme l'accelerazione è perpendicolare alla circonferenza (ossia diretta come il raggio) e che inoltre è costante. Ci proponiamo ora di calcolare il valore di questa accelerazione che è detta accelerazione centripeta.

Siano $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ i due vettori velocità nei due istanti successivi τ_1 e τ_2. Se il vettore $\mathbf{v}_2$ è spostato parallelamente, osserviamo che l'angolo formato dai due vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ è uguale all'angolo descritto dal punto mobile nel tempo $\Delta\tau = \tau_1 - \tau_2$.

D'altra parte, il modulo dei due vettori è uguale a ωR e pertanto il modulo di Δv è uguale alla corda della circonferenza di raggio ωR che insiste su un angolo $\Delta\vartheta$. Al tendere di $\Delta\tau$ a zero, anche $\Delta\vartheta$ tende a zero e la corda si confonde con il relativo arco, la cui lunghezza è uguale al prodotto del raggio ωR per l'angolo $\Delta\vartheta$ misurato in radianti, ossia:

$$\Delta v = \omega R \Delta\vartheta \qquad (2.21)$$

d'altra parte sappiamo che:

$$\Delta\vartheta = \omega \Delta\tau \qquad (2.22)$$

e che, per $\Delta\tau$ tendente a zero si ha:

$$\Delta v = a \Delta\tau \qquad (2.23)$$

possiamo allora scrivere:

$$a \Delta\tau = \omega R \omega \Delta\tau \qquad (2.24)$$

ossia, semplificando:

$$a = \omega^2 R \qquad (2.25)$$

In conclusione il moto circolare uniforme è caratterizzato dal fatto di avere velocità e accelerazione costanti in modulo e perpendicolari fra loro.

2.5 MOTO ARMONICO SEMPLICE (SIMPLE HARMONIC MOTION)

Per definizione, un corpo si muove con moto armonico semplice, se il suo spostamento x, relativo all'origine del sistema di coordinate, in funzione del tempo τ è pari a:

$$x = A \sin(\omega\tau + \alpha) \qquad (2.43)$$

α = fase iniziale (τ = 0);

A = ampiezza dello spostamento del corpo: poiché la funzione sin $(\omega\tau + \alpha)$ varia tra -1 e +1, lo spostamento del corpo varia tra -A e +A;

ω = frequenza angolare del moto

$$\omega = \frac{2\pi}{P} = 2\pi\upsilon \qquad (2.44)$$

P = periodo

ν = frequenza angolare

La funzione sin $(\omega\tau + \alpha)$ riprende un medesimo valore ogni qualvolta l'argomento aumenta di 2π; ciò equivale a dire che la funzione seno è una funzione periodica: ad intervalli di tempo uguali il punto ripassa nella stessa posizione alla stessa velocità. Il periodo P é l'intervallo di tempo che intercorre tra i due istanti in cui il corpo occupa posizioni omologhe.

La velocità v della particella è pari:

$$v = \frac{dx}{d\tau} = \omega A \cos(\omega\cdot\tau + \alpha) \qquad (2.45)$$

e l'accelerazione:

$$a = \frac{d^2x}{d\tau^2} = -\omega^2 A \sin(\omega\cdot\tau + \alpha) = -\omega^2 x \qquad (2.46)$$

Lo spostamento del corpo che si muove con moto armonico semplice si può anche considerare come la componente $\mathbf{OP}_x$ lungo l'asse orizzontale X di un vettore **OP** di modulo A che ruota con velocità angolare ω e che forma in un determinato istante τ l'angolo $\beta = (\omega\tau + \alpha)$ con l'asse Y (vedi figura).

Velocità e accelerazione sono anch'esse rappresentabili tramite un vettore, i cui moduli sono rispettivamente ω A e ω^2 A, e che risultano in anticipo di fase rispettivamente di $\pi/2$ e di π radianti rispetto al vettore **OP**.

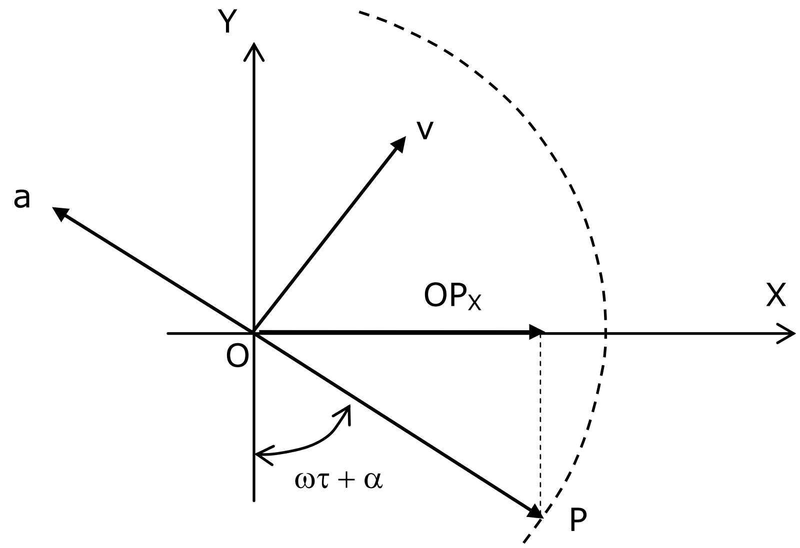

Figura 10: Vettore posizione, velocità ed accelerazione

La forza F, che deve agire su di una particella di massa M perché questa si muova di moto armonico semplice, può essere dedotta dalla seconda legge di Newton:

$$F = M\,a = -\,\omega^2 M\,x \qquad (2.47)$$

ovvero, ponendo $k = M\,\omega^2$:

$$F = -\,k\,x \qquad (2.48)$$

Nel moto armonico semplice la forza applicata è proporzionale allo spostamento ed ha direzione opposta ad esso.

k è talvolta chiamata costante elastica e rappresenta la forza necessaria per spostare il corpo di una distanza unitaria.

Bibliografia

M. Alonso, E.J. Finn, *Elementi di Fisica*, Vol. 1, Inter European Editions, 1974

A. Baracca, M. Fischetti, R. Rigatti, *Fisica e realtà*, Vol.2, Ed. Cappelli, 1999

P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci, Elementi di Fisica. Meccanica e Termodinamica, Vol.1, EdiSES, 2007