

# DINAMICA 2

---

*Quantità di moto e urti*

*Attrito tra solidi*

*Attrito viscoso*

*Forza elastica*

*Proprietà meccaniche dei solidi*

*Forza centripeta*

## Seconda Legge di Newton: quantità di moto

Dalla seconda Legge di Newton si può dedurre un'altra considerazione: «l'azione di una forza su una particella è quella di farne variare la quantità di moto».

Ma che cos'è la quantità di moto di un punto materiale?

Si definisce quantità di moto di un punto materiale il vettore:

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad [kg \cdot m / s = N \cdot s]$$

Consideriamo ora la seconda legge di Newton e vediamo di ricavare il legame tra forza e quantità di moto:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Questa relazione ci fornisce un importante principio, noto come principio di conservazione della quantità di moto:

«Una particella libera si muove sempre con quantità di moto costante nel tempo».

Infatti, se  $\vec{F} = 0$  allora  $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$  cioè  $\vec{p} = \text{costante}$

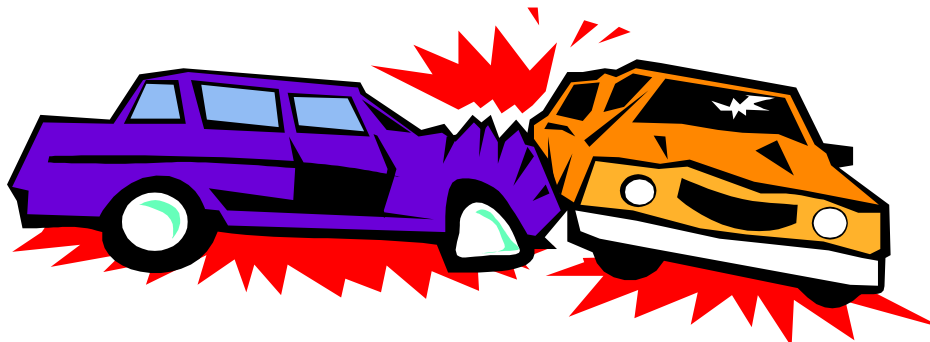
## Seconda Legge di Newton: quantità di moto di un sistema di particelle

Un osservatore inerziale riconosce se una particella **non** è libera quando egli osserva che la velocità della particella o la sua quantità di moto non è costante: la particella subisce una accelerazione.

Sperimentalmente si osserva che *la quantità di moto di un sistema di particelle isolato è costante.*

$$\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \text{costante}$$

Per due corpi interagenti, la variazione della quantità di moto del corpo A in un certo tempo, è uguale ed opposta alla variazione della quantità di moto del corpo B.




## Teorema dell'impulso

Dall'equazione  $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$  si ricava che:  $\vec{F}dt = d\vec{p}$

E cioè l'azione di una forza durante un tempo  $dt$  provoca una variazione infinitesima della quantità di moto del punto. In termini finiti si ha:

$$\vec{J} = \vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_0 = m(\vec{v} - \vec{v}_0)$$

nell'ipotesi che  $m$  sia costante



Questa relazione è l'espressione matematica del **teorema dell'impulso**:

«L'impulso di una forza applicata ad un punto materiale provoca una variazione della sua quantità di moto».

La variazione della quantità di moto è tanto maggiore quanto più elevato è il valore dell'impulso, ovvero, data una forza, quanto più a lungo è il tempo in cui agisce.

N.B. Quantità di moto e impulso hanno la stessa unità di misura:

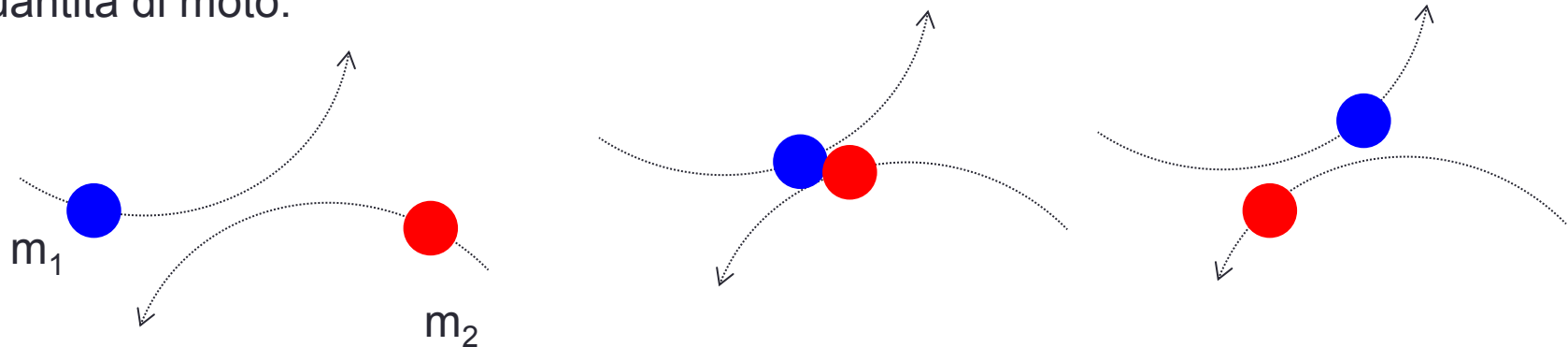
$$[kg \cdot m / s] = [N \cdot s]$$

## Applicazione del principio di conservazione della quantità di moto: urti anelastici

Un'applicazione del principio della quantità di moto applicato ad un sistema di punti è il caso di urto tra punti materiali.

URTO: due punti materiali vengono a contatto e interagiscono per un intervallo di tempo trascurabile rispetto al tempo di osservazione.

Durante l'urto si verifica una FORZA IMPULSIVA che possiamo considerare una forza interna. In assenza di forze esterne, vale il principio di conservazione della quantità di moto.



prima dell'urto, istante  $t_i$

$$p_i = m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}$$

durante l'urto

dopo l'urto, istante  $t_f$

$$p_f = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

Per il principio di conservazione della quantità di moto  $p_i = p_f$

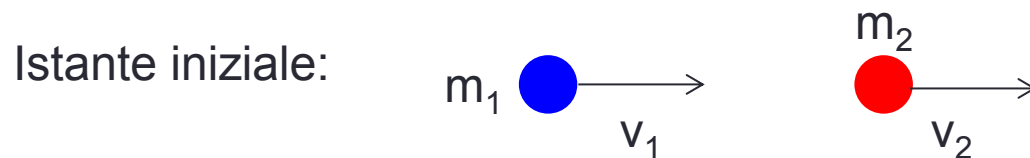
$$m_1 (v_{1f} - v_{1i}) = m_2 (v_{2i} - v_{2f})$$

>>>>>>>

$$\Delta p_1 = - \Delta p_2$$

## Urto completamente anelastico

Si abbiano due punti materiali che viaggiano ciascuno con una propria velocità. Il punto di massa  $m_1$  urta contro il punto di massa  $m_2$ . Se l'urto è completamente anelastico i due punti materiali dopo l'urto cominciano a viaggiare agganciati.

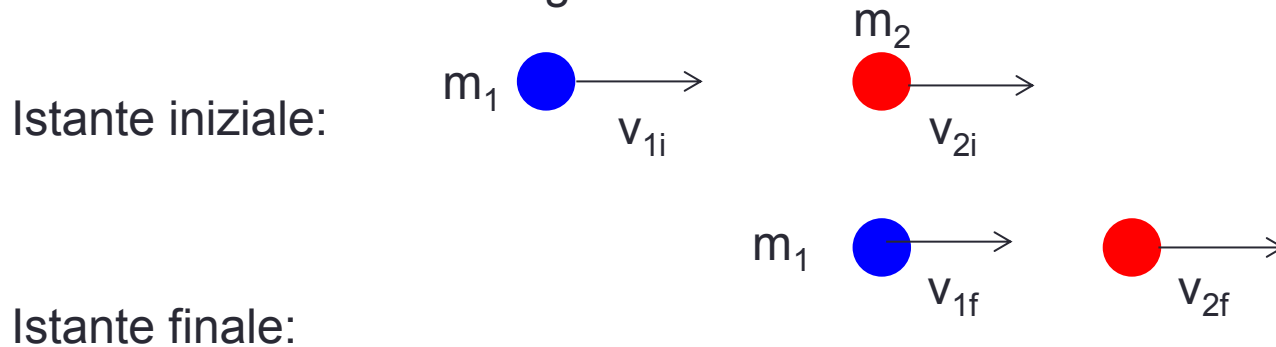


Per il principio di conservazione della quantità di moto  $p_i = p_f$

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2) v_f$$

## Urto elastico

Si abbiano due punti materiali che viaggiano ciascuno con una propria velocità. Il punto di massa  $m_1$  urta contro il punto di massa  $m_2$ . Se l'urto è elastico i due punti materiali dopo l'urto ritornano separati. Durante l'urto si conserva la quantità di moto del sistema e l'energia cinetica del sistema.



prima dell'urto, istante  $t_i$

$$p_i = m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}$$

dopo l'urto, istante  $t_f$

$$p_f = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

Per il principio di conservazione della quantità di moto  $p_i = p_f$

$$-m_1 (v_{1f} - v_{1i}) = m_2 (v_{2f} - v_{2i}) \quad \gggggggg \quad -\Delta p_1 = \Delta p_2$$

## Azione dinamica delle forze

1) Moto rettilineo uniforme:

$$\mathbf{v} = \text{cost} \qquad \mathbf{a} = 0 \qquad \mathbf{F} = m\mathbf{a} = 0$$

Questo moto è il risultato dell'azione di diverse forze che si equilibrano.

2) Moto uniformemente accelerato:  $a = \text{cost}$   
la forza agente è costante nel tempo.

3) Se  $\mathbf{F}$  è variabile nel tempo si ha un moto vario. Nel caso specifico del moto curvilineo l'accelerazione presenta due componenti e anche la forza allora è costituita da due componenti:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_T + m\mathbf{a}_N$$

La componente ortogonale della forza si chiama forza centripeta ed è essenziale per mantenere il moto nella direzione curvilinea; la componente tangenziale determina la variazione del modulo della velocità.

*N.B. La forza centripeta non è un tipo particolare di forza ma è solo il nome che si dà alla componente ortogonale alla traiettoria della risultante delle varie forze agenti.*



## Attrito radente tra solidi

Ogni volta che due corpi sono in contatto, si manifesta una resistenza al moto relativo tra i due corpi. Tale resistenza si manifesta come una diminuzione della quantità di moto ed è indicativa di una forza che si oppone al moto: tale forza è chiamata **attrito**.

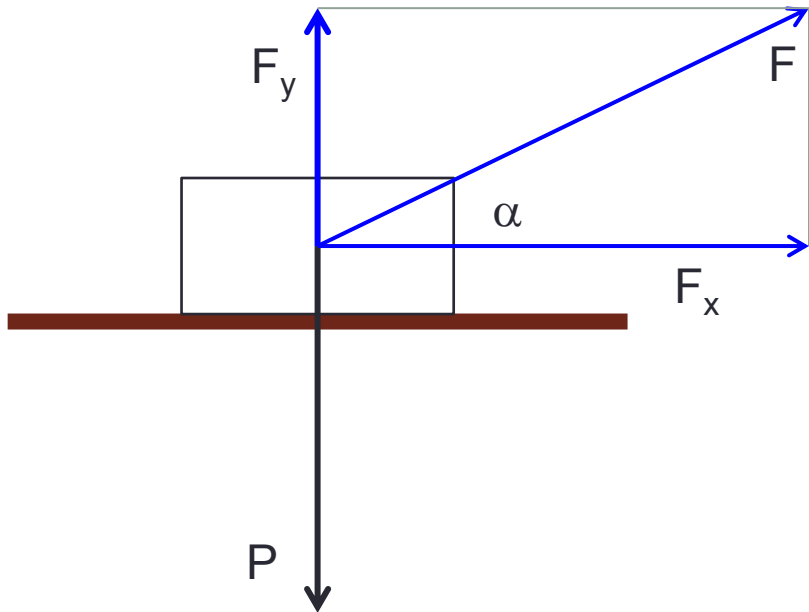
L'interazione tra le molecole dei due corpi ne è la causa; tra i fattori che ne influenzano la variabilità, la velocità relativa, la natura e lo stato delle superfici a contatto.

La forza di attrito è proporzionale alla forza  $N$  componente della reazione vincolare normale al piano di contatto tra i corpi, secondo un fattore di proporzionalità  $f$  detto fattore di attrito.  $N$  dipende perciò dalla forza con cui i due corpi sono tenuti in contatto.

La forza di attrito ha direzione del moto del corpo ed è orientata nel verso opposto.

In generale è possibile distinguere tra l'**attrito statico** (coefficiente di attrito  $f_s$ ) e l'**attrito dinamico** (coefficiente di attrito  $f_d$ ). Il primo corrisponde alla forza minima necessaria per porre in moto relativo due corpi inizialmente in contatto ed in quiete; il secondo corrisponde alla forza necessaria per mantenere i corpi in moto relativo uniforme.

## Attrito radente tra solidi



$$F_y = F \sin \alpha$$

$$F_x = F \cos \alpha$$

Consideriamo una cassa di massa  $m$  e peso  $P$  appoggiata su un piano orizzontale, che venga tirata a seguito dell'applicazione di una forza obliqua  $F$ .

$F_x$  è la componente di  $F$  che determina il moto sul piano orizzontale

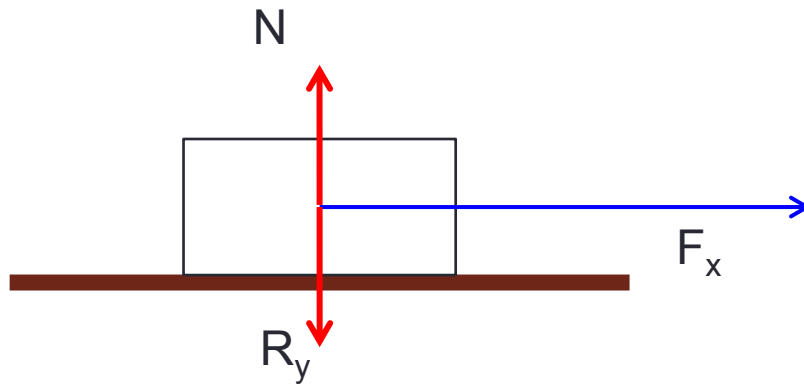
$F_y$  è la componente di  $F$  nella direzione verticale, essa potrebbe determinare sollevamento dell'oggetto solo se risulta maggiore del peso dell'oggetto stesso.

In quest'ultimo caso sul piano si esercita una forza risultante in direzione  $y$  pari a:

$$R_y = (F_y - P)$$

A questa forza il piano reagisce con una reazione vincolare che chiamiamo  $N$  che sarà diretta nella direzione  $y$  e rivolta verso l'alto.

## Attrito statico $F_{AS}$



Equilibrio nella direzione  $y$ : affinché l'oggetto sia vincolato a muoversi sul piano ci dovrà essere equilibrio tra  $R_y$  e  $N$ , cioè:

$$N = -R_y = - (F_y - P) = P - F_y = P - F \sin\alpha$$

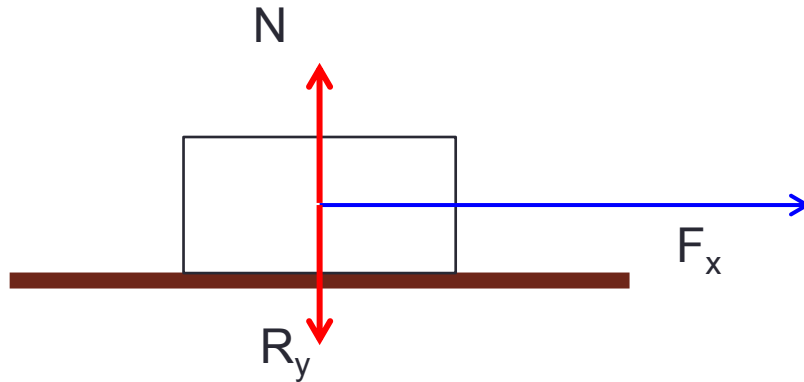
Equilibrio nella direzione  $x$ : in questa direzione agiscono due forze, la componente  $F_x$  e la forza di attrito che si genera tra oggetto e piano; l'oggetto sarà fermo finché

$$F_x \leq F_{AS}$$

La forza di attrito statico è quantificabile con il prodotto della componente della reazione vincolare perpendicolare al piano per il coefficiente di attrito statico:

$$F_{AS} = f_s N = f_s (P - F \sin\alpha)$$

## Attrito dinamico $F_{AD}$



Se:  $F_x > F_{AS}$

Allora l'oggetto è messo in movimento. L'attrito però non viene meno, bensì continuerà ad esserci una forza di attrito che si oppone al moto. Questa forza prende il nome di attrito dinamico,  $F_{AD}$

$$F_{AD} = f_d N$$

In questo caso la forza motrice che mantiene il corpo in movimento sarà:

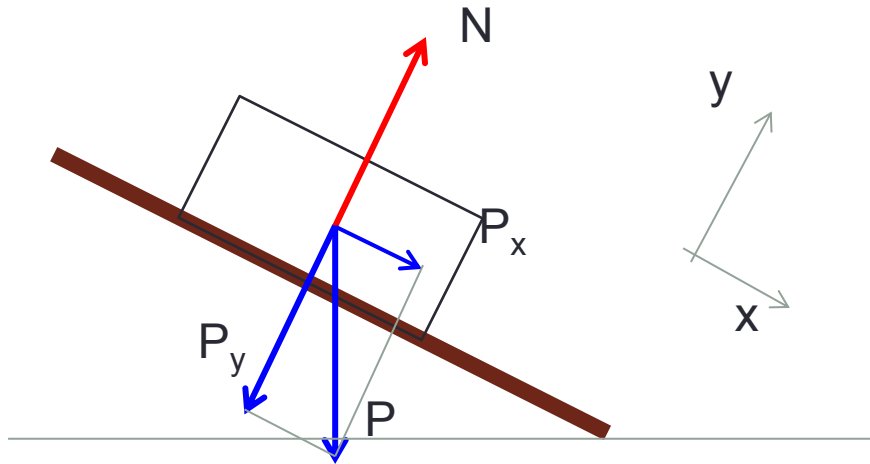
$$F_{motrice} = F_x - F_{AD}$$

e l'accelerazione sarà:

$$m a = F_x - F_{AD}$$

$$a = (F_x - F_{AD})/m$$

## Piano inclinato



Consideriamo un corpo che possa muoversi sotto l'azione del suo peso e di eventuali altre forze ad esso applicate (compresa la forza di attrito radente) su un piano inclinato di un angolo  $\alpha$  rispetto ad un piano orizzontale.

La forza peso può essere scomposta nelle due componenti  $P_x$  e  $P_y$ :

$$P_x = mg \operatorname{sen} \alpha$$

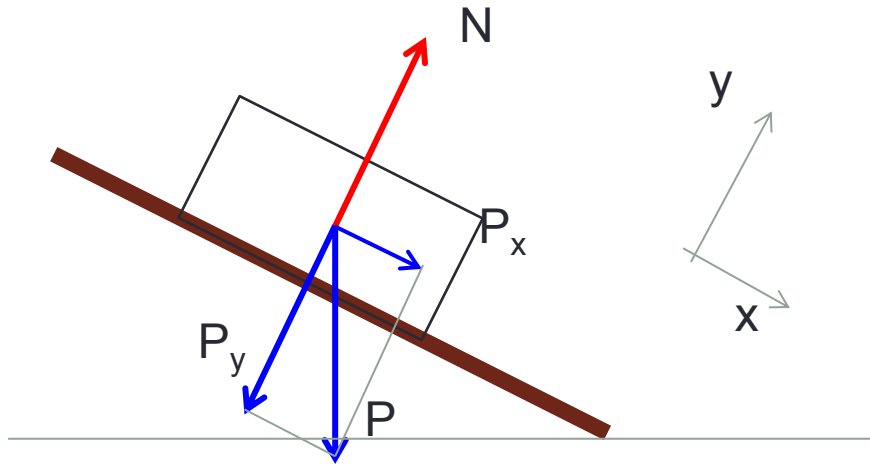
$$P_y = mg \operatorname{cos} \alpha$$

Perpendicolarmente al piano possiamo determinare la risultante come:

$$R = -mg \operatorname{cos} \alpha + N = 0$$

La risultante è nulla dato che il corpo è vincolato a muoversi sul piano inclinato.

## Piano inclinato



Se c'è attrito radente tra il corpo e il piano, allora il corpo comincerà a scendere solo se:

$$P_x > F_{AS} \quad \text{cioè se} \quad mg \operatorname{sen} \alpha > N f_{AS}$$

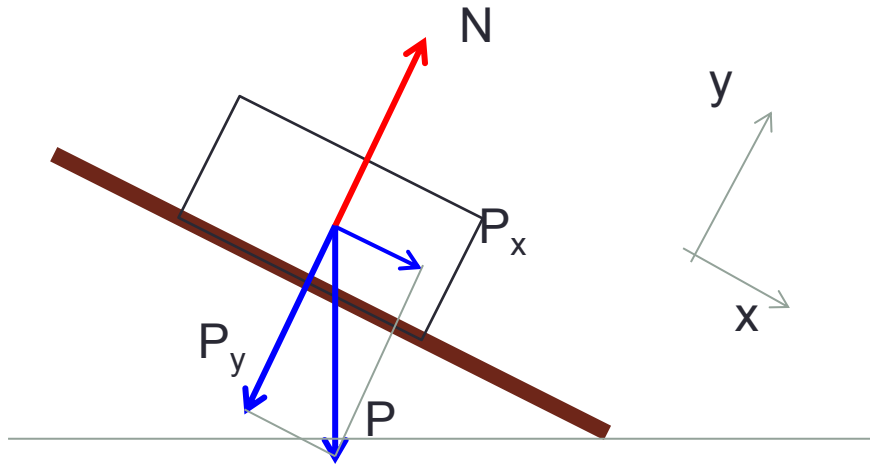
$$\text{Poiché} \quad N = mg \operatorname{cos} \alpha$$

Allora la condizione affinché il corpo scenda è:

$$mg \operatorname{sen} \alpha > mg \operatorname{cos} \alpha f_{AS}$$

$$\text{Ovvero:} \quad \operatorname{tg} \alpha > f_{AS}$$

## Piano inclinato



Se la condizione  $\operatorname{tg} \alpha > f_{AS}$  è verificata, allora il corpo comincia a scendere lungo il piano. Vediamo qual è l'equazione del moto:

$$mg \operatorname{sen} \alpha - mg \cos \alpha f_{AD} = ma$$

Da cui ricaviamo che l'accelerazione con cui il corpo scende lungo il piano inclinato è:

$$a = g (\operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha f_{AD})$$

## Coefficienti d'attrito

$f_s$  e  $f_d$  sono numeri adimensionali,  $f_s, f_d < 1$ ;  
 dipendono dalle superfici a contatto;  
 per una data coppia di superfici,  $f_d < f_s$ .

	$f_s$	$f_d$
Steel on steel	0.74	0.57
Aluminum on steel	0.61	0.47
Copper on steel	0.53	0.36
Rubber on concrete	1.0	0.8
Wood on wood	0.25–0.5	0.2
Glass on glass	0.94	0.4
Waxed wood on wet snow	0.14	0.1
Waxed wood on dry snow	—	0.04
Metal on metal (lubricated)	0.15	0.06
Ice on ice	0.1	0.03
Teflon on Teflon	0.04	0.04
Synovial joints in humans	0.01	0.003



## Attrito nei fluidi

La forza di attrito viscoso è una forza che si oppone al moto di un corpo all'interno di un fluido. Tale forza è proporzionale alla velocità con cui il corpo si sta muovendo.

$$\vec{F} = -k \eta \vec{v}$$

$k$  = coefficiente dipendente dalla forma del corpo [m].

per una sfera:  $k = 6 \pi r$  ( $r$  = raggio)

$\eta$  = coefficiente di viscosità dinamica [kg / (m s)].

Da cui si ricava che l'accelerazione è:

$$\vec{a} = -k \eta \frac{\vec{v}}{m}$$

In presenza di attrito viscoso non si può realizzare una condizione di equilibrio statico poiché se  $\mathbf{v} = 0$  allora la forza si annullerebbe.

## Attrito nei fluidi

Consideriamo un punto materiale di massa  $m$  lasciato cadere in un fluido e assumiamo che le uniche forze agenti su di esso siano la forza peso e la forza di attrito viscoso.

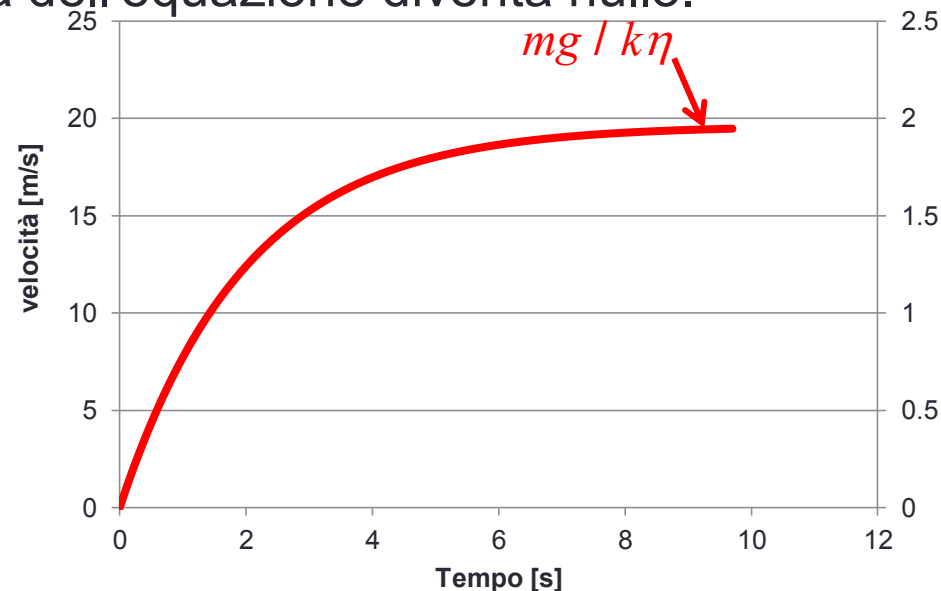
L'equazione del moto diventa:

$$\vec{F} = m \vec{g} - k\eta \vec{v}$$

Poichè la forza **peso** ( $mg$ ) è costante, l'accelerazione produce un aumento continuo della velocità  $v$  ed un corrispondente aumento dell'attrito, finché ad un certo punto il termine di destra dell'equazione diventa nullo.

In questa situazione anche l'accelerazione  $a$  è nulla. La velocità (velocità *limite*) è quindi costante e pari a:

$$\vec{v}_{\text{limite}} = \frac{m \vec{g}}{k\eta}$$



## Forza elastica

La forza elastica unidimensionale è una forza di direzione costante, con verso rivolto sempre ad un punto O, chiamato centro, e con modulo proporzionale alla distanza da O. Se assumiamo come asse x la direzione della forza e come origine il centro O, possiamo scrivere:

$$\vec{F} = -k \vec{x}$$

Dove k è detta costante elastica.

Il moto risultante per effetto di una forza elastica è rettilineo, qualora la velocità iniziale sia nulla.

L'accelerazione sarà:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = -\frac{k}{m} x = -\omega^2 x$$

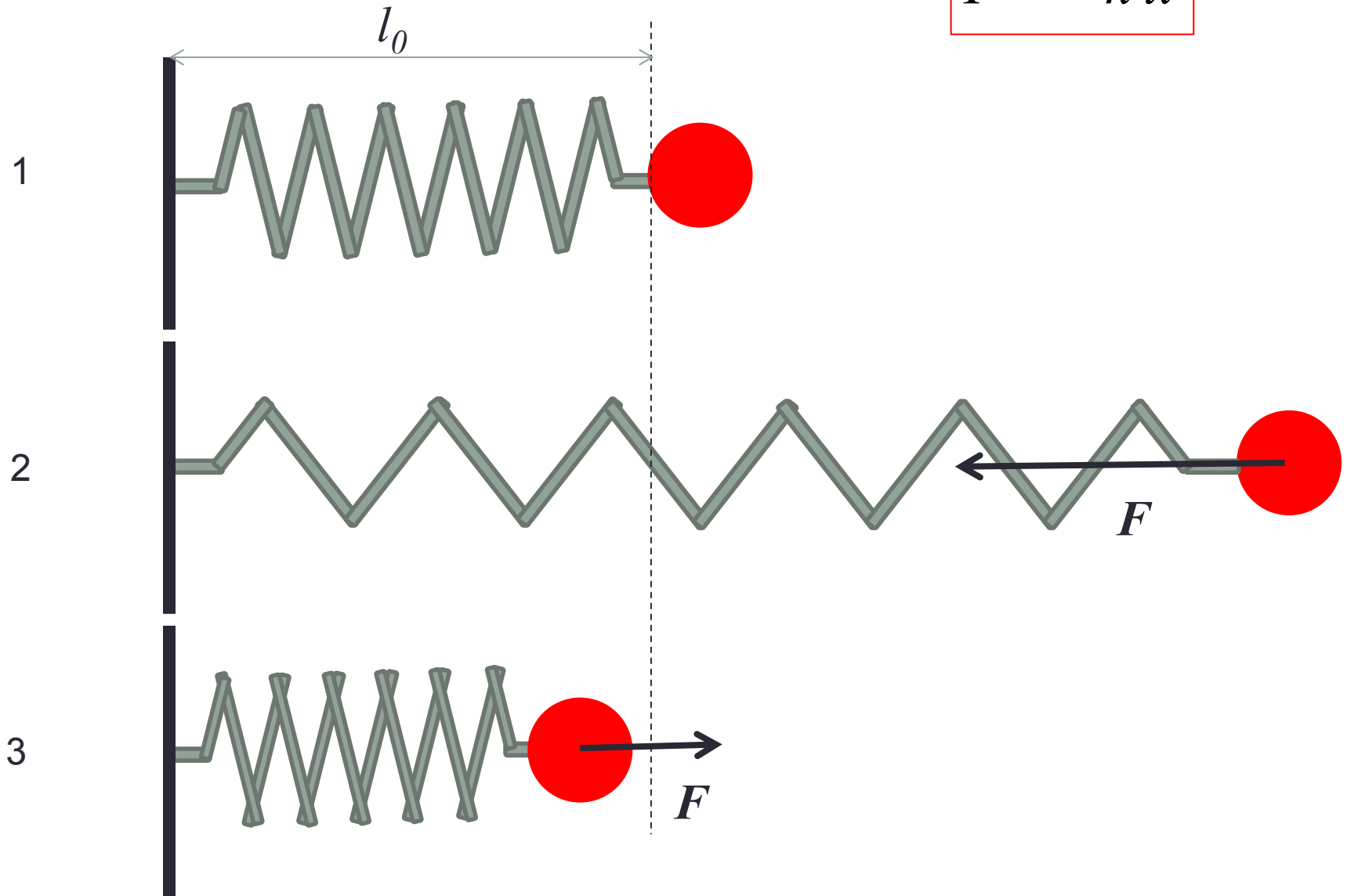
Quindi il moto è armonico semplice con pulsazione  $\omega$  e periodo T determinati dal rapporto k/m tra costante elastica e massa del punto materiale a cui è applicata la forza.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

## Forza elastica

Una forza elastica viene applicata tramite una molla.

$$\vec{F} = -k \vec{x}$$



## Forza elastica

1- la molla è a riposo. Ha una lunghezza pari a  $l_0$

2- la molla viene estesa, assumendo una lunghezza  $l > l_0$ , essa sviluppa una forza  $\mathbf{F}$  che tende a riportarla nella condizione di riposo.

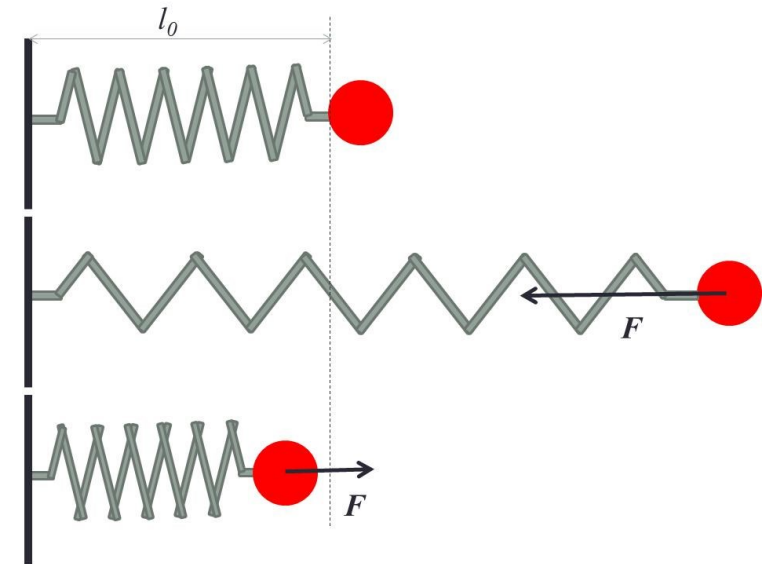
$$F = -k(l - l_0)$$

3- se lasciata andare la molla oscilla attorno alla posizione di equilibrio con moto armonico; l'equazione del moto è:

$$m a = -kx$$

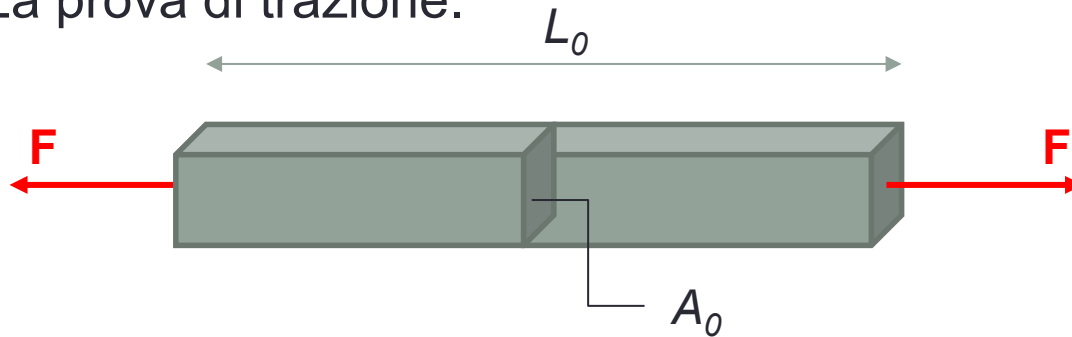
La cui soluzione è:

$$x = A \text{sen} (\omega t + \phi)$$



## Proprietà meccaniche

La prova di trazione.



Dopo la trazione il provino raggiunge una lunghezza  $L$ .

Si definisce **sforzo**,  $\sigma$  :  $\sigma = \frac{F}{A_0}$  [MPa]

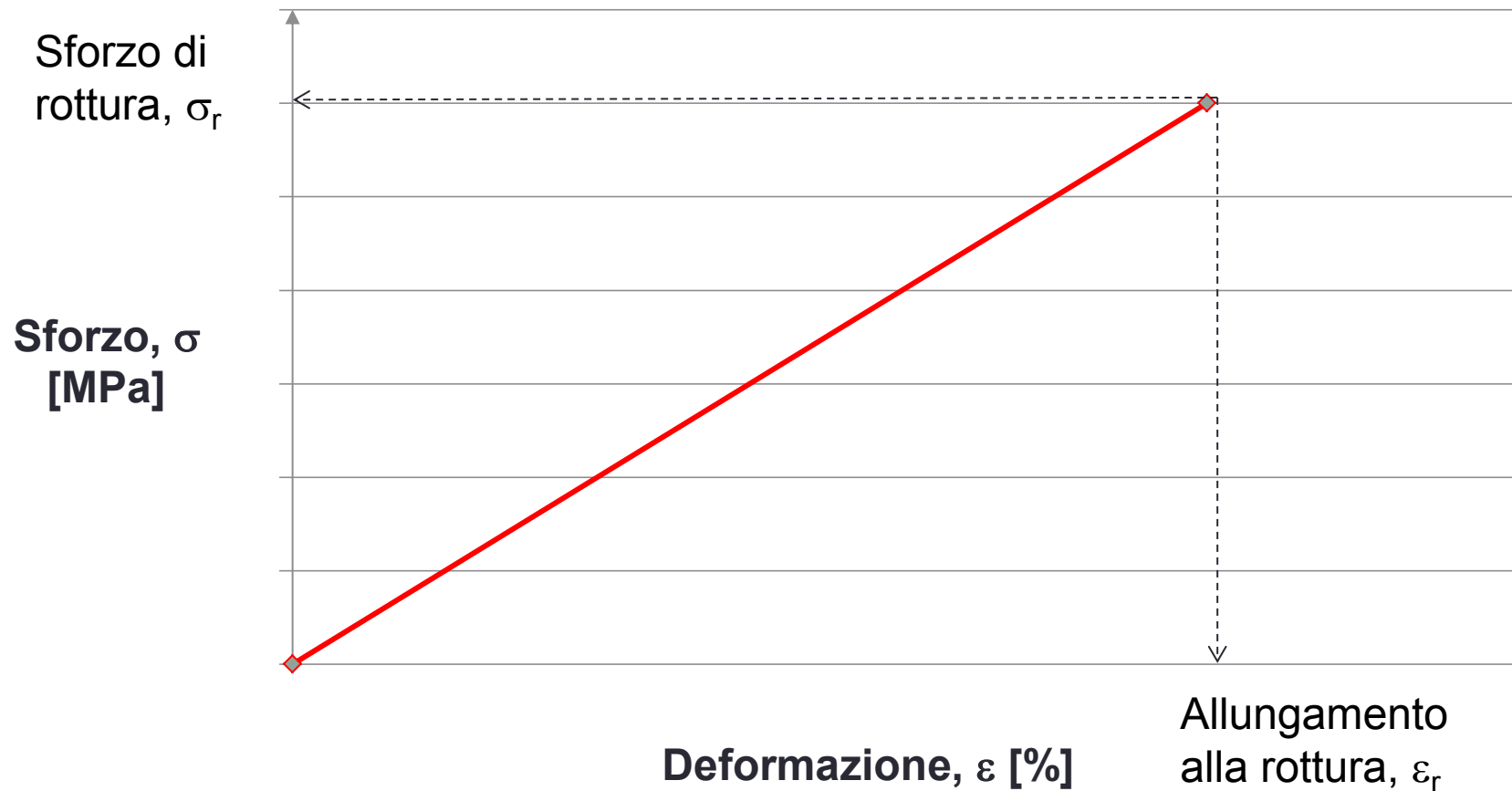
Si definisce **deformazione**,  $\varepsilon$  :  $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$  [%]

Se il materiale ha un comportamento elastico, venuta meno lo sforzo, viene meno anche la deformazione.

## Curva sforzo-deformazione: materiale elastico

Legge di Hooke: la deformazione è direttamente proporzionale allo sforzo applicato.

$$\sigma = E \varepsilon$$



## Il modulo di elasticità, $E$

Il coefficiente di proporzionalità,  $E$ , della curva sforzo-deformazione è una proprietà dei materiali detta **modulo di elasticità** o **modulo di Young**.

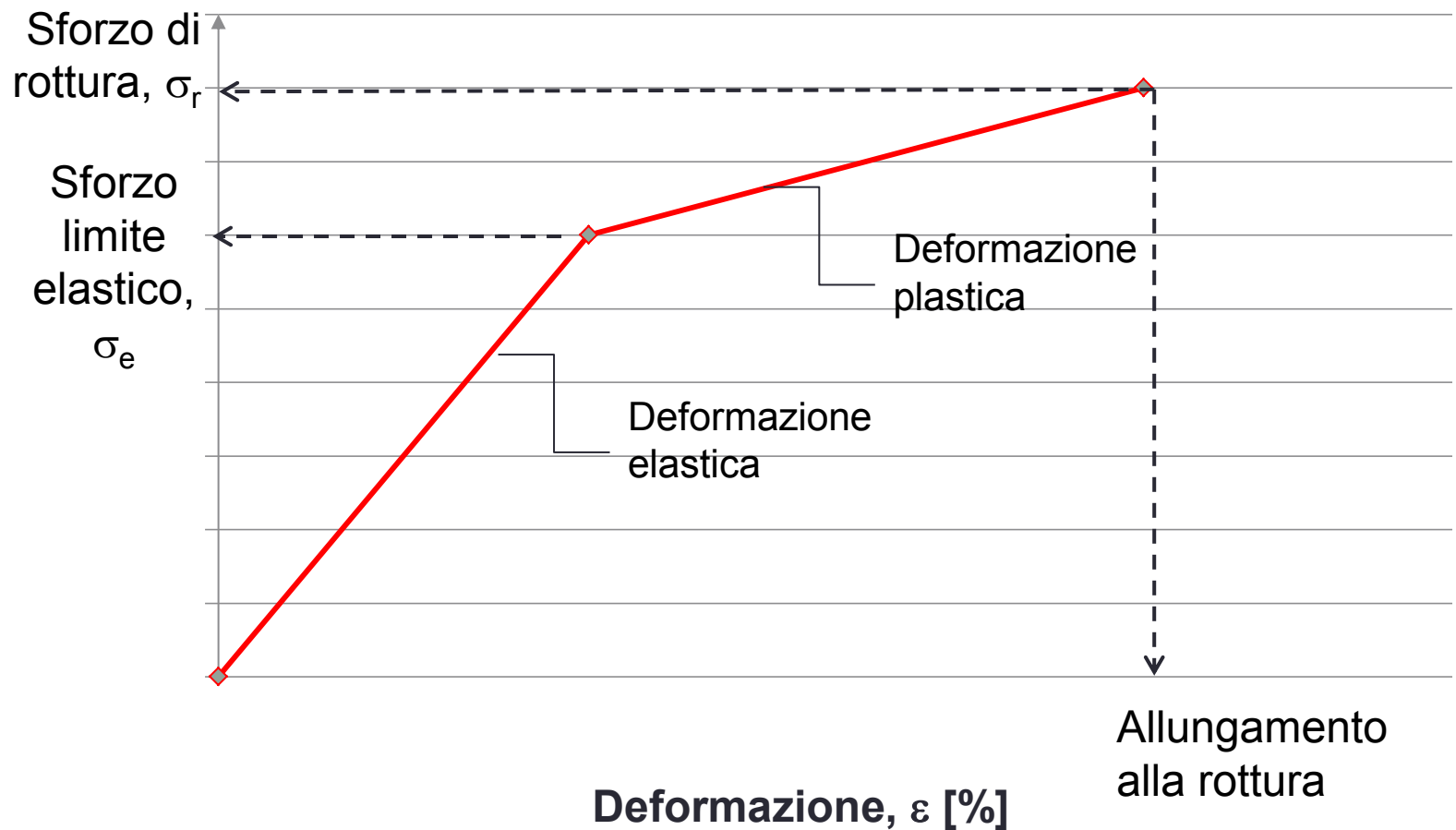
Più grande è la pendenza della curva e maggiore è il modulo di elasticità, dunque più rigido è il materiale.

I materiali fortemente deformabili elasticamente hanno basso modulo di Young.

Si misura in pascal [Pa].



## Curva sforzo-deformazione: materiale a comportamento elasto-plastico



## Grandezze ottenibili dalla curva $\sigma$ - $\varepsilon$

- **Modulo di elasticità,  $E$  [MPa]:** è indicativo della **rigidità** del materiale, ossia della sua capacità a deformarsi elasticamente.
- **Limite elastico o sforzo di snervamento,  $\sigma_{sn}$  [MPa]:** è indicativo della resistenza alla deformazione di un materiale elasto-plastico. (es. le gambe di una sedia..)
- **Sforzo di rottura,  $\sigma_r$  [MPa]:** è indicativo della resistenza alla rottura di un materiale.
- **Deformazione percentuale a rottura,  $\varepsilon_r$ :** è indicativa della **duttilità plastica** di un materiale cioè della capacità di sopportare grandi deformazioni plastiche senza rompersi.

## Forza centripeta: curva su strada piana

Le forze centripete sono generalmente prodotte da rotaie, pneumatici, fili che collegano il corpo ad un punto fisso ovvero vincoli che consentono di incurvare la traiettoria oppure da azioni a distanza come quelle gravitazionali.

PROBLEMA: vogliamo studiare la velocità con cui un'auto può affrontare una curva in una strada piana. La forza centripeta necessaria affinché l'auto possa restare in traiettoria è fornita dall'attrito tra pneumatici e strada.

$$F_{AS} = N f_{AS} = F_N$$

dove  $N$  è la componente normale al piano della reazione vincolare:  $N = mg$

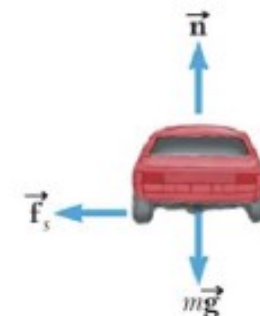
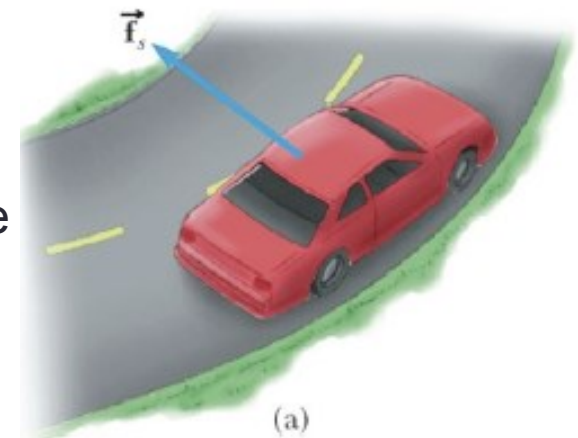
Sappiamo che la forza centripeta è data da:

$$F_N = m a_N = m v^2/r$$

$$mg f_{AS} = m v^2/r$$

Si ricava:

$$v = \sqrt{f_{AS} \cdot g \cdot r}$$



Fonte: Giannozzi