Accelerazione

Se la velocità non si mantiene costante il moto non è più uniforme ma prende il nome di **moto accelerato**.

ACCELERAZIONE: variazione della velocità rispetto al tempo

Distinguiamo tra ACCELERAZIONE MEDIA e ACCELERAZIONE ISTANTANEA

$$\boxed{a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} \left[\frac{m}{s^2}\right]}$$

$$\boxed{a_{\mathbf{ist}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = d\left(\frac{ds}{dt}\right)\left(\frac{1}{dt}\right) = \frac{d^2 s}{dt^2} \quad \left[\frac{m}{s^2}\right]}$$

Se $a > 0$ il punto aumenta la sua velocità quindi accelera.

Se $a < 0$ il punto diminuisce la sua velocità quindi decelera.

Se $a = 0$ il punto mantiene velocità costante.

Moto rettilineo uniformemente accelerato: velocità

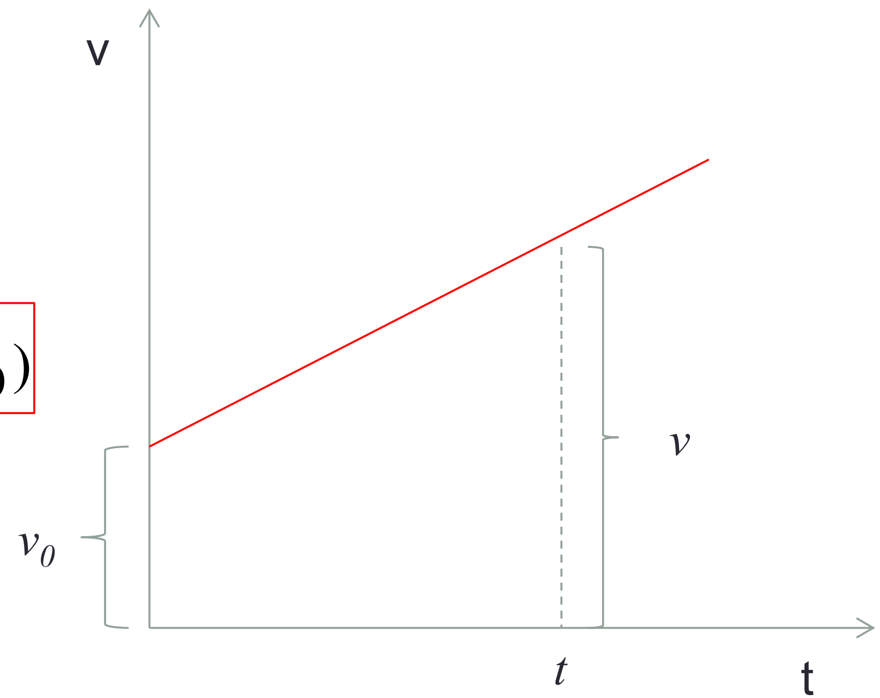
Un punto si muove di moto uniformemente accelerato quando la sua accelerazione rimane costante nel tempo. Ciò significa che accelerazione media e accelerazione istantanea coincidono.

$$a = \textbf{costante} = a_m = a_{ist}$$

$$a_{ist} = \frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \quad dv = a\ dt$$

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a\, dt \quad \Rightarrow \quad v - v_0 = a \int_{t_0}^{t} dt$$

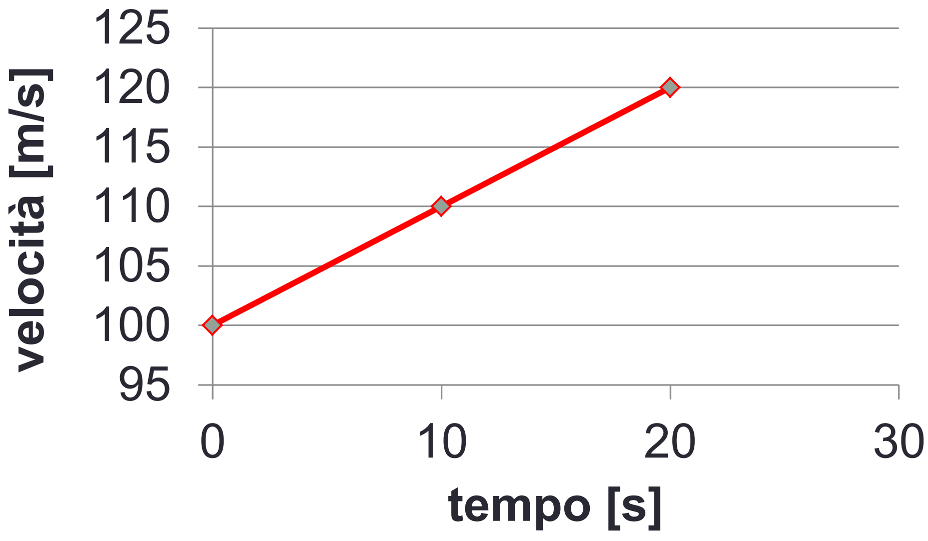
$$v - v_0 = a(t - t_0) \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = v_0 + a(t - t_0)}$$



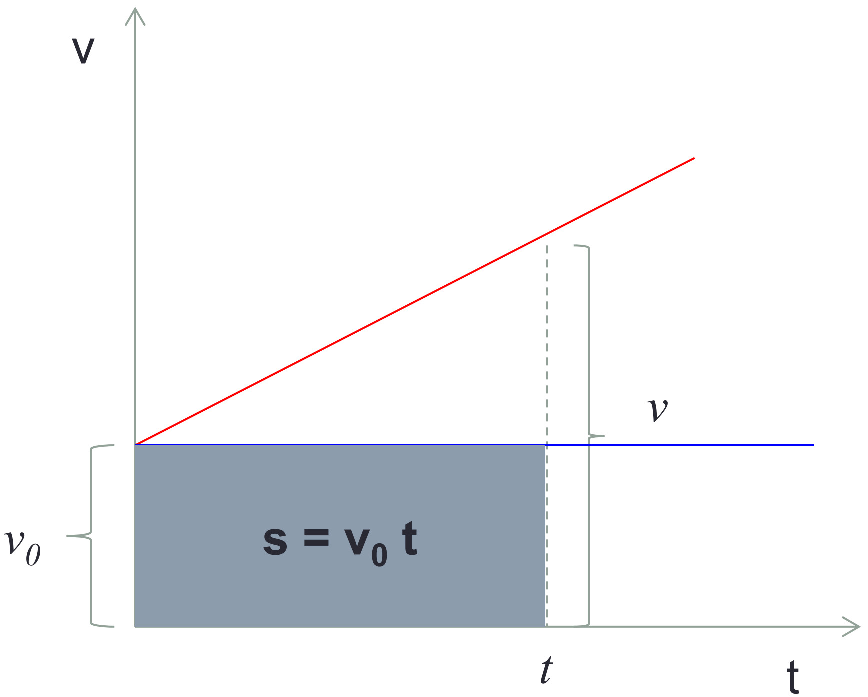
Esempio

Sia $v_0 = 100$ m/s
$a = 1$ m/s^2

Tempo t [s]	Velocità v [m/s]
0	$v = v_0 + a\,t = 100 + 1 \cdot 0 = 100$
10	$v = v_0 + a\,t = 100 + 1 \cdot 10 = 110$
20	$v = v_0 + a\,t = 100 + 1 \cdot 20 = 120$



Moto rettilineo uniformemente accelerato: legge oraria



Moto uniformemente accelerato
Area del trapezio:
$s - s_0 = (v_0+v)\ t / 2$
$s = s_0 + v_0\ t/2 + v_0\ t/2 + at^2/2$

Moto uniforme $v = v_0$ dopo un certo intervallo di tempo $t-t_0$ il punto avrà percorso uno spostamento pari a
$s = v_0\ (t-t_0)$ se $t_0 = 0$
$s = v_0\ t$

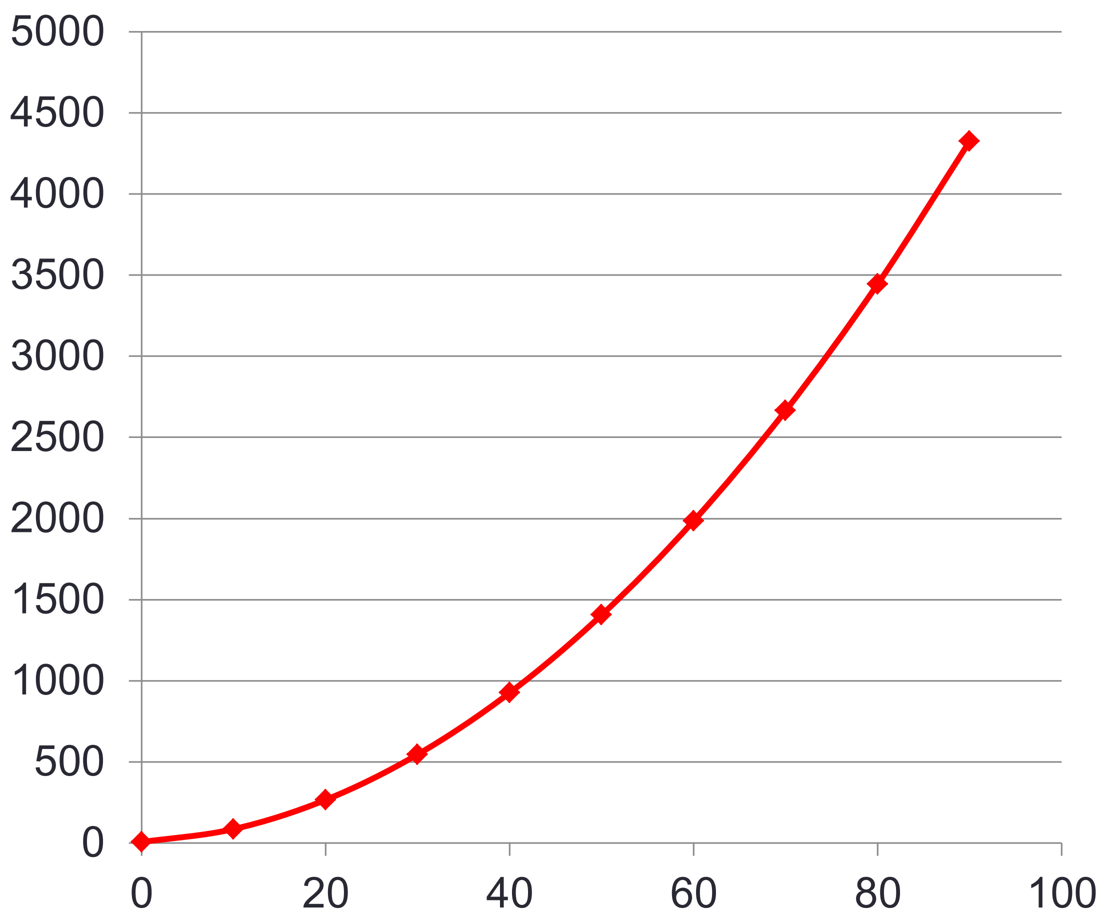
$$v = v_0 + a(t - t_0)$$

$$\boxed{s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2}$$

Nel moto rettilineo uniformemente accelerato la funzione oraria dello spostamento è una parabola.

Moto rettilineo uniformemente accelerato: diagramma orario

t [s]	s [m]
0	5
10	85
20	265
30	545
40	925
50	1405
60	1985
70	2665
80	3445
90	4325



Moto verticale in assenza di attrito

Se trascuriamo l'attrito dell'aria, un corpo lasciato libero di cadere in vicinanza della superficie terrestre si muove verso il basso con accelerazione costante e pari a circa 9.81 m/s^2. Tale accelerazione prende il nome di **accelerazione di gravità** e si indica con **g**.

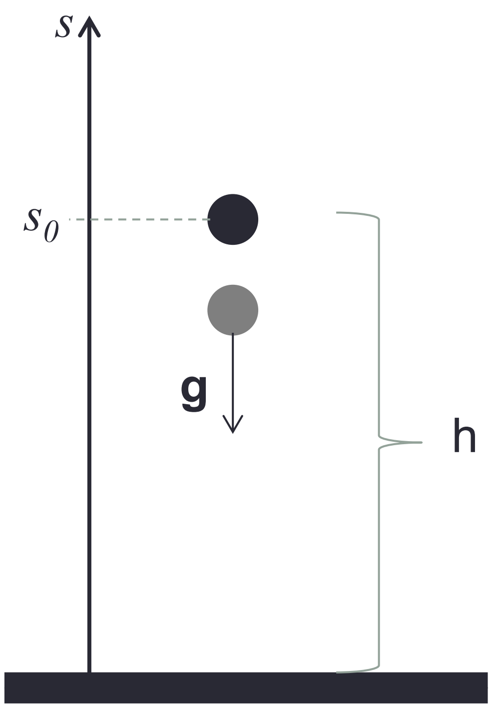
Analizziamo il moto: nell'istante iniziale t_0 il corpo è fermo ad un'altezza h.

$$v_0 = 0 \qquad s_0 = h \qquad t_0 = 0$$

Durante la caduta: $v = g\,t$

La legge oraria del moto è: $$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$s = h - \frac{1}{2} g t^2$$



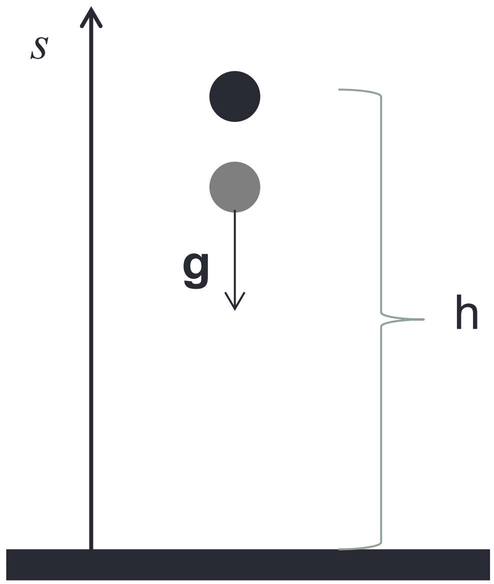
Il segno meno è necessario perché lo spostamento è positivo verso l'alto, ma l'accelerazione è rivolta verso il basso.

Moto verticale in assenza di attrito

Il corpo arriva al suolo dopo un certo intervallo di tempo che possiamo determinare:

$$quando \quad s = 0 \;\Rightarrow\; 0 = h - \frac{1}{2} g t^2$$

$$t^2 = \frac{2h}{g} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = \sqrt{\frac{2h}{g}}}$$

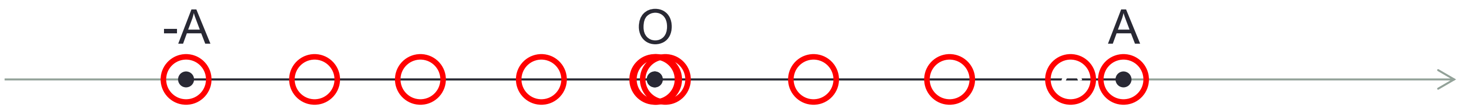


La velocità con cui il corpo impatta sul suolo è:

$$\boxed{v = g\,t = g\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gh}}$$

Moto armonico semplice lungo un asse rettilineo: legge oraria

Consideriamo un punto P che parte dal punto O, si muove lungo una direzione rettilinea, arriva in A, quindi inverte il verso del suo spostamento, passa per O e prosegue oltre fino ad arrivare in –A, inverte nuovamente il suo moto e ripassa per O.



La legge oraria di questo moto è la seguente:

$$\boxed{x(t) = A\,sen(\omega t + \Phi)}$$

x: spostamento

A: ampiezza del moto [m]

$(\omega t + \Phi)$: fase del moto [rad]

ω: pulsazione [rad/s]

Φ: fase iniziale [rad]

Moto armonico: peculiarità

$$\boxed{x(t) = A\,sen(\omega t + \Phi)}$$

x: spostamento

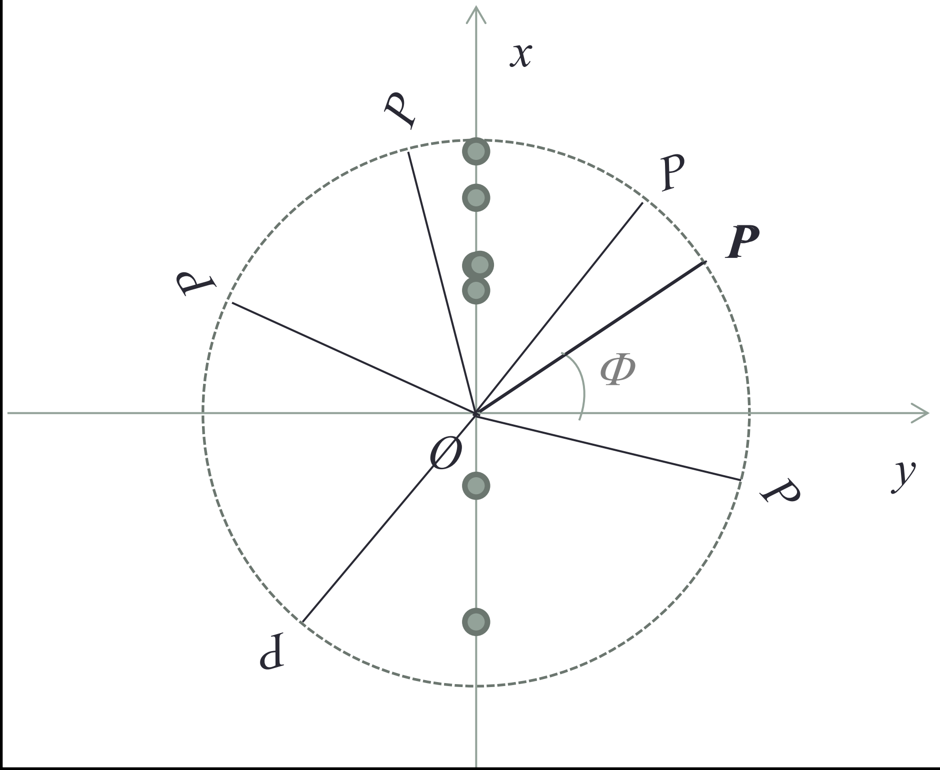
Dalla legge oraria vediamo che:

1) E' una funzione sinusoidale: pertanto è una funzione **periodica**, dunque il moto è un **MOTO PERIODICO** e cioè ad intervalli uguali di tempo il punto ripassa nella stessa posizione alla stessa velocità.
2) Poiché il moto è periodico il punto descrive delle oscillazioni di ampiezza A attorno al centro O. Queste oscillazioni sono tutte uguali tra loro e hanno la stessa durata.
3) La durata di una oscillazione completa è detta **PERIODO** del moto armonico.
4) La legge oraria è funzione sinusoidale (dipende dal seno dell'angolo di fase del moto). Poiché la funzione seno ha come valori estremi +1 e -1, il punto che si muove di moto armonico piò oscillare tra due posizioni (massimo e minimo) x_{max}= A e x_{min}= -A

Moto armonico: periodo

Determiniamo il periodo, P, del moto armonico.

Consideriamo due istanti di tempo t e t' tali per cui $t' - t = P$.
Sappiamo che dopo il periodo P il punto passa per la stessa posizione e quindi $x(t) = x(t')$.
Il periodo della funzione seno è 2π, quindi le fasi nei due istanti differiscono di un angolo pari a 2π.



$$(\omega t' + \Phi) = (\omega t + \Phi + 2\pi)$$

$$t' - t = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$P = \frac{2\pi}{\omega} \quad >>>>> \quad \omega = \frac{2\pi}{P}$$

Il moto si ripete velocemente quando la pulsazione è grande, mentre è lento per bassi valori della pulsazione.

Moto armonico: frequenza

Si definisce frequenza il numero di oscillazioni compiute nell'unità di tempo. Pertanto si calcola come l'inverso del periodo. Maggiore è la pulsazione e maggiore sarà il numero di oscillazioni compiute nell'unità di tempo.

$$P = \frac{2\pi}{\omega} \quad >>>>> \quad f = \frac{1}{P} = \frac{\omega}{2\pi}$$

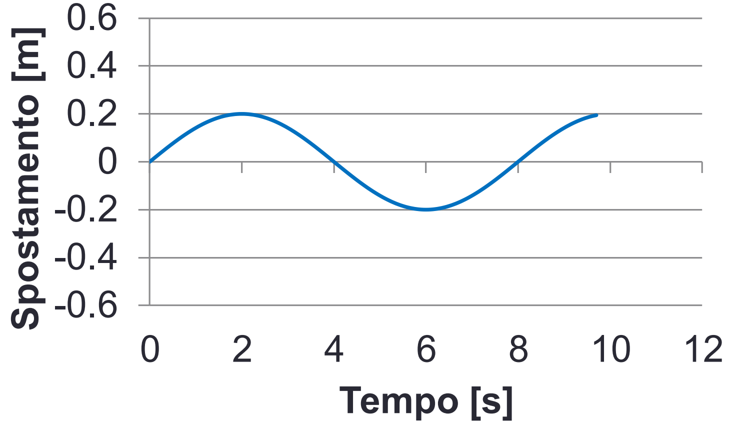
Notiamo che periodo e frequenza non dipendono dall'ampiezza del moto.

Moto armonico: velocità

x: spostamento

Dalla legge oraria per derivazione ricaviamo la funzione v(t) per il moto armonico.

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \Phi)$$

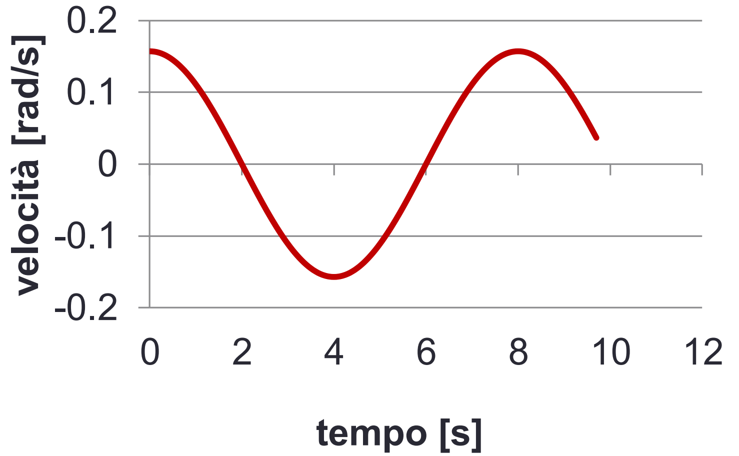


- La velocità è massima quando il coseno della fase vale 1, in questo caso:

$\cos(\omega t + \Phi) = 1$ se $(\omega t + \Phi) = 0$

Allora: $x = A \text{ sen } 0 = 0$ *(centro di oscillazione)*

E $v_{max} = \omega A$



- La velocità è nulla quando il coseno della fase è nullo, in questo caso:

$\cos(\omega t + \Phi) = 0$ se $(\omega t + \Phi) = \pi/2$

oppure $(\omega t + \Phi) = 3\pi/2$

Allora: $x = A \text{ sen } (\pi/2) = A$ oppure $x = A \text{ sen } (3\pi/2) = -A$

E $v = 0$

Moto armonico: accelerazione

x: spostamento

Dalla legge oraria per derivazione ricaviamo la funzione a(t) per il moto armonico.

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \underbrace{A\,sen(\omega t + \Phi)}_{x(t)} = -\omega^2 x$$

L'accelerazione è **massima** quando il seno della fase vale 1, in questo caso:

$sen\,(\omega t + \Phi) = 1$ se $(\omega t + \Phi) = \pi/2$ o $3\pi/2$

Allora: $x = A\,sen\,\pi/2 = A$ *oppure* $x = -A$ *(estremi di oscillazione)*

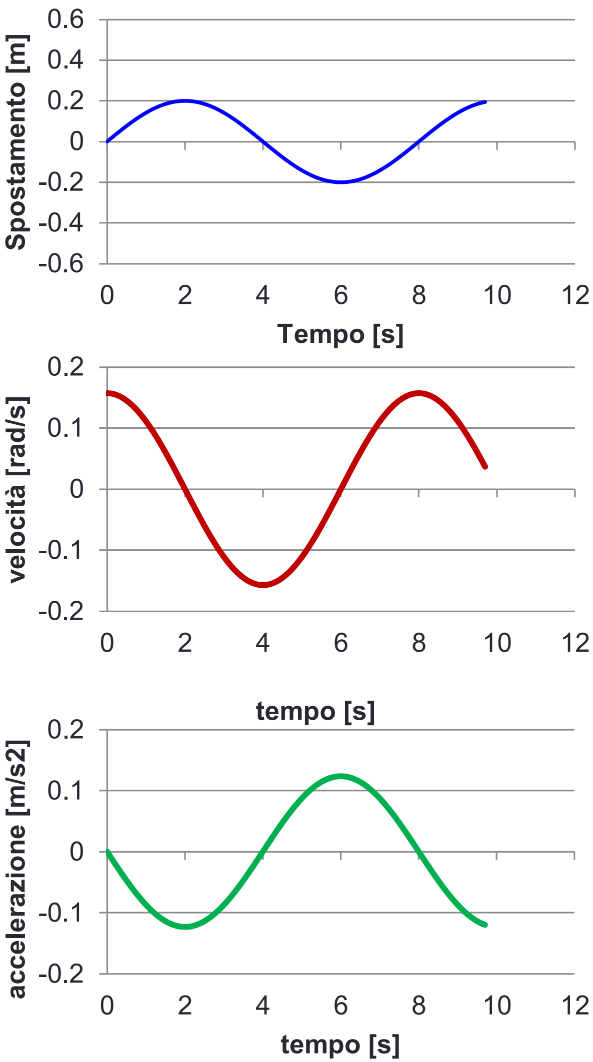
E $a_{max} = -\omega^2 A$

L'accelerazione è **nulla** quando il seno della fase è nullo, in questo caso:

$sen\,(\omega t + \Phi) = 0$ se $(\omega t + \Phi) = 0$

Allora: $x = A\,sen\,(0) = 0$ *(centro di oscillazione)*

E $a = 0$



Moto rettilineo smorzato esponenzialmente: accelerazione e v(t)

Si tratta di un moto vario in cui l'accelerazione soddisfa alla condizione:

$\boxed{a = - k\, v}$ con k [s^{-1}] costante positiva

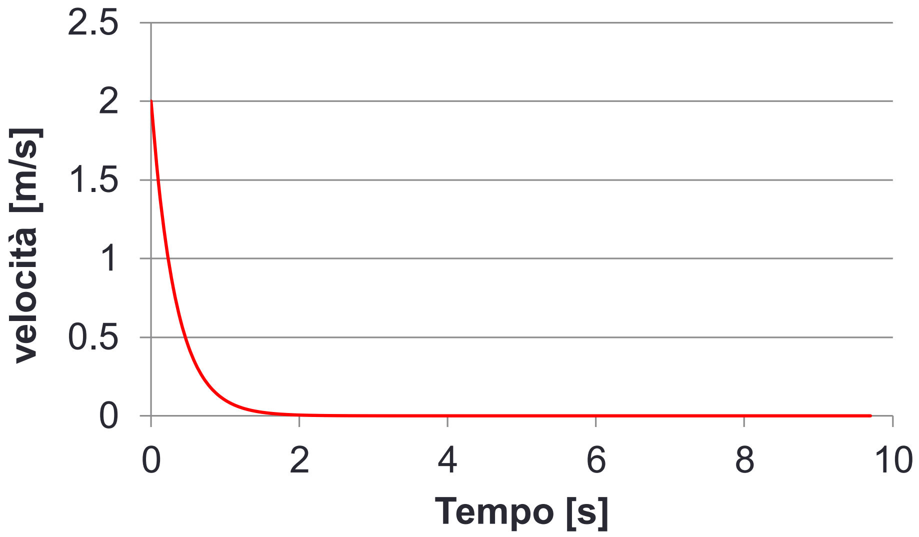
L'accelerazione in questo moto è sempre contraria alla velocità che pertanto diminuisce.

L'accelerazione varia proporzionalmente alla velocità.

La velocità di questo moto diminuisce esponenzialmente con il tempo e quindi il punto in un certo istante si ferma.

Da

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{dv}{dt} = -kv \\ si\ \ risolve \\ v = v_0\, e^{-kt} \end{array}}$$



Moto rettilineo smorzato esponenzialmente: v(x)

x: spostamento

Calcoliamo ora come varia la velocità con la posizione, cioè determiniamo la funzione $v(x)$.

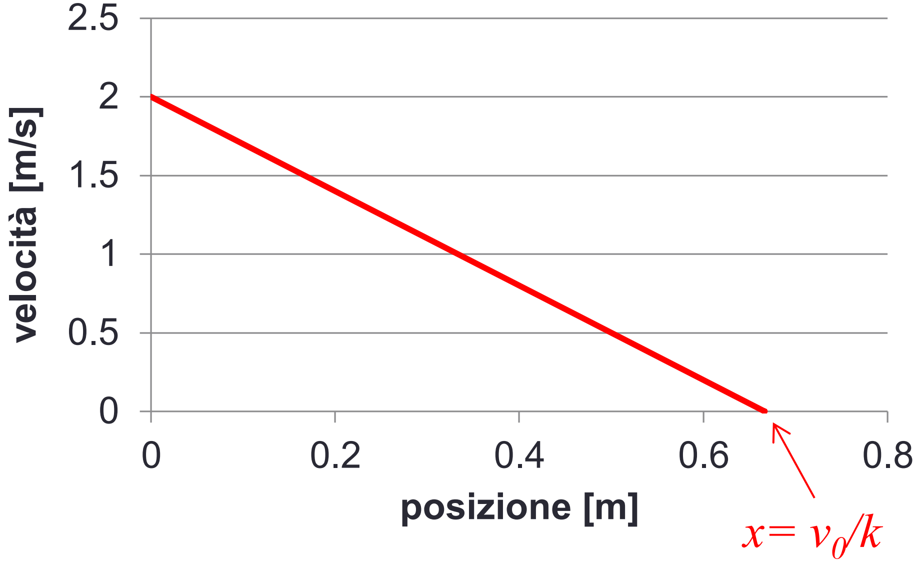
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}v$$

$$a = -kv$$

$$\frac{dv}{dx}v = -kv$$

$$risolvendo:$$

$\boxed{v = v_0 - kx}$ è una **funzione lineare.**



La velocità si annulla quando: $x = v_0/k$

Moto rettilineo smorzato esponenzialmente: legge oraria

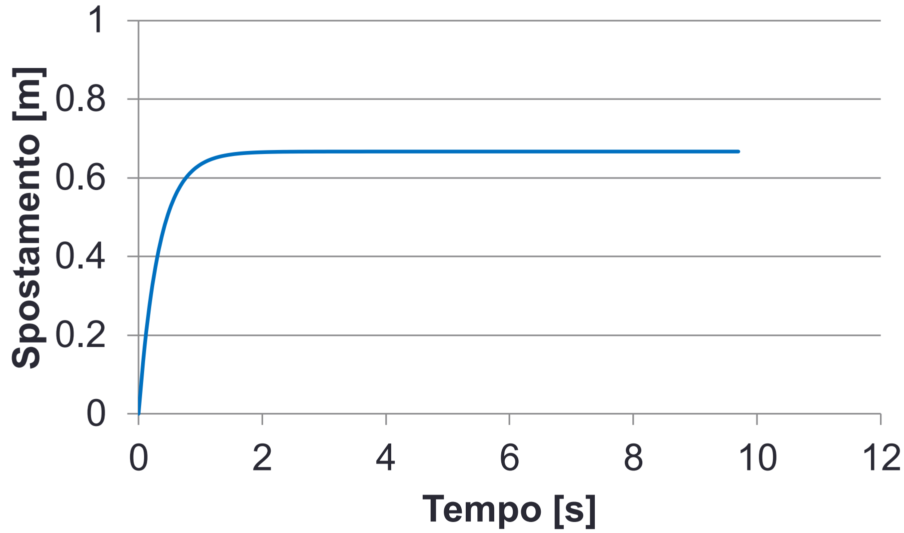
Ricaviamo la legge oraria partendo dalle due equazioni trovate per la velocità, v(t) e v(x).

$$v = v_0\, e^{-kt} \qquad v = v_0 - kx$$

$$v_0\, e^{-kt} = v_0 - kx$$

$$x = \frac{v_0 - v_0\, e^{-kt}}{k}$$

$$\boxed{x = \frac{v_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)}$$



x: spostamento

La rapidità di variazione della funzione $v = v_0\, e^{-kt}$ *è determinata dal valore di k.*

L'inverso di k è detta costante di tempo: $\frac{1}{k} = \tau$

Grande k significa piccola τ e la decrescita della velocità è rapida.

Piccolo k significa grande τ e la decrescita della velocità è lenta quindi il punto si ferma dopo.