4

LAVORO ED ENERGIA

L'energia è il concetto fisico più importante che si incontra in tutta la scienza. Una sua chiara comprensione e un'esatta valutazione della sua importanza non fu raggiunta che nel 1847, quando il fisico tedesco Hermann Helmholtz (1821-1894) enunciò la *legge generale dell'energia*. Attualmente per definire il concetto di energia è possibile partire da quello di lavoro.

4.1 LAVORO

Nel linguaggio scientifico la parola *lavoro* ha un significato più ristretto di quello che ha nel linguaggio comune. Per esempio per sollevare un oggetto per alcuni metri è necessario esercitare una forza tanto intensa da vincere la forza gravitazionale diretta verso il basso compiendo un certo lavoro oppure se si spinge una cassa su una superficie ruvida con una forza tale da vincere l'attrito e da spostarla di un certa distanza si esegue anche in questo caso una certa quantità di lavoro. E su ciò tutti sono d'accordo. Ma un uomo fermo che tenga in mano una pesante valigia fa una grande fatica, si stancherà molto forse ma, scientificamente parlando, non compie un lavoro meccanico. Se non c'è movimento non c'è lavoro. Possiamo, come primo tentativo, definire il lavoro come:

$$\text{Lavoro} = \text{forza} \times \text{spostamento} \tag{4.1}$$

Per andare un po' più a fondo riprendiamo il caso dell'oggetto sollevato dalla superficie terrestre. Consideriamo sia la forza che lo spostamento come vettori (caratterizzati da un modulo, direzione e verso ben precisi): per tale motivo saranno indicati in seguito in grassetto. Dato che è la forza di gravità $\boldsymbol{F}_g$ a trattenere sulla superficie terrestre i corpi, per sollevarli si deve applicare una forza eguale e di verso contrario alla forza di gravità. Ora la forza di gravità dipende dalla massa m del corpo e dall'accelerazione di gravità $\boldsymbol{g}$ ($g = 9.81\ m/s^2$) secondo quanto enunciato dalla seconda legge della dinamica $\boldsymbol{F}_g = m\ \boldsymbol{g}$. Se la massa del corpo è espressa in kilogrammi la forza risulta espressa in (kg m)/s^2 ovvero nell'unità di misura derivata detta *newton*. Se si solleva l'oggetto in verticale per una differenza di quota d, espressa in metri, il lavoro che ne risulta è $L = m\ g\ d$ (kg m^2)/s^2. L'unità di misura derivata che corrisponde a questa relazione, e che si esprime nelle unità di misura (kg

$m^2)/s^2$, è detta *Joule* in onore di James Prescott Joule (1818-1889), il fisico i cui studi chiarirono i concetti di lavoro e energia.

Nell'esempio considerato ci si è limitati al caso in cui l'oggetto venga sollevato (cioè spostato verticalmente) operando contro la forza di gravità. In questo caso la forza applicata (che ha modulo e direzione uguali alla forza di gravità e verso contrario) ha la *medesima direzione dello spostamento* e la relazione (4.1) ha un chiaro significato. E' possibile però applicare agli oggetti anche forze aventi direzione diversa da quella in cui avviene lo spostamento. Per esempio spingendo un'auto si rileva immediatamente come varia lo sforzo secondo l'angolo che si assume con il corpo e/o con le braccia. La parte di una forza che compie lavoro in seguito ad uno spostamento è la sua componente lungo la direzione dello spostamento.

Consideriamo il corpo di massa *m* della figura seguente: la forza ***F*** viene applicata al suo baricentro per trascinarlo lungo un piano facendogli compiere uno spostamento ***s***. La direzione della forza forma con la direzione del moto un angolo θ. La forza può essere considerata come la somma vettoriale di due forze indipendenti le componenti x e y rispettivamente lungo la direzione del moto e in direzione perpendicolare a questa.

$$F_x = F \cos\theta \qquad F_y = F \sin\theta \tag{4.2}$$

La componente F_x è diretta lungo lo spostamento perciò è la sola a compiere un lavoro, il quale sarà pari a:

$$L = F_x \; s = F \cos\theta \; s \tag{4.3}$$

La componente F_y è diretta contro il piano di appoggio, quindi non dà luogo a alcun spostamento e di conseguenza non compie lavoro.

Ricordando il significato di prodotto scalare di due vettori possiamo scrivere in termini più generali (in grassetto i vettori):

$$L = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} \tag{4.4}$$

Relazione che ribadisce ancora una volta come il lavoro compiuto da una forza che provoca uno spostamento si ottenga considerando la sua proiezione nella direzione del moto.

Una caratteristica importante del lavoro compiuto da una forza è la rapidità con cui esso è stato eseguito, questo concetto viene espresso in termini fisici dalla grandezza fisica che va sotto il nome di ***potenza***.

Se durante un intervallo di tempo $\Delta\tau$ è eseguito il lavoro L, la potenza media impiegata è:

$$\bar{P} = \frac{L}{\Delta \tau} \tag{4.5}$$

passando a considerare intervalli di tempo infinitesimi è possibile definire la potenza istantanea come:

$$P = \lim_{\Delta \tau \to 0} \frac{L}{\Delta \tau} \tag{4.6}$$

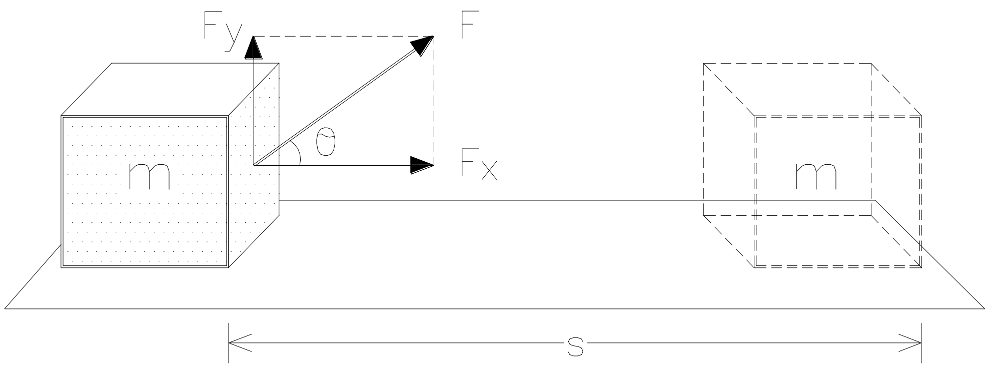


Figura 1: *Lavoro su un corpo rigido*

L'unità di misura corrispondente ha le dimensioni di un lavoro diviso un tempo e quindi, utilizzando le rispettive unità nel SI, si ottiene J/s che prende il nome di watt (simbolo W) in onore di James Watt l'ingegnere scozzese le cui ricerche permisero che il motore a vapore divenisse di uso pratico.
Definito in questo modo il lavoro é possibile introdurre il concetto di energia e nei successivi paragrafi prendere in considerazione alcune forme di energia molto importanti.

4.2 ENERGIA

Partiamo da una osservazione che riguarda la vita quotidiana:

- durante lo svolgimento di una attività manuale l'Uomo produce una certa quantità di lavoro;
- contestualmente l'equilibrio biologico del corpo umano risulta modificato e le sue condizioni biologiche iniziali vengono ripristinate tramite una alimentazione proporzionale all'attività svolta.

Il fenomeno osservato si può interpretare dicendo che a fronte del lavoro eseguito diminuisce la quantità di una proprietà del corpo umano, questa può essere riportata al livello iniziale per mezzo di una opportuna alimentazione.

La precedente deduzione si può estendere a molti altri fenomeni fisici, ad esempio:
- una massa d'acqua che agisce sulla ruota idraulica di un mulino,
- la corda di un arco che agisce sulla freccia,
- il martello che agisce sul chiodo.

Anche in questi casi il corpo che esegue lavoro subisce una variazione di una sua proprietà: l'acqua perde la quota iniziale, l'arco perde la tensione iniziale, il martello perde la velocità iniziale. Inoltre ripristinando il valore iniziale di tale proprietà si riporta il corpo alle condizioni necessarie per sviluppare nuovamente del lavoro. Infatti riportando l'acqua all'altezza da cui è caduta, la corda allo stato di tensione originario, il martello alla velocità posseduta prima dell'impatto sul chiodo, gli stessi corpi riacquistano la capacità di sviluppare una quantità di lavoro pari a quella precedente.

Se definiamo una nuova proprietà dei corpi, chiamata ***energia***, come l'attitudine a compiere lavoro, possiamo dare una interpretazione unica di tutti i fenomeni sopra citati (e molti altri) nei quali vi è una produzione di lavoro e contestualmente la diminuzione di una proprietà dei corpi. In altri termini l'energia posseduta da un corpo viene modificata dal lavoro scambiato con gli altri corpi.
Dal punto di vista quantitativo il principio di conservazione dell'energia meccanica afferma che ***l'incremento di energia del sistema*** *coincide numericamente con il* ***lavoro fatto sul sistema dalle forze esterne*** *ad esso applicate, durante la trasformazione che va dallo stato iniziale allo stato finale*; analogamente la perdita di energia è pari al lavoro svolto dal sistema contro le forze esterne.

4.2.1 ENERGIA CINETICA ED ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE

Introduciamo due forme di energia meccanica che dipendono dalla velocità e dalla posizione di una massa. Si consideri ora una forza *F* che agisca su una massa *m* in moto facendone variare la velocità *v con* un'accelerazione *a*. Se tale forza ha la stessa direzione del moto si può scrivere:

$$F = m a = m \frac{dw}{d\tau} \tag{4.7}$$

e il lavoro svolto da tale forza lungo lo spostamento elementare *ds* vale:

$$dL = Fds = m\frac{dw}{d\tau}ds = mdw\frac{ds}{d\tau} \qquad (4.8)$$

Poiché per definizione *ds/d*τ corrisponde alla velocità istantanea w del corpo si ha anche:

$$L = m\ w\ dw \qquad (4.9)$$

e pertanto il lavoro svolto dalla forza lungo lo spostamento dal punto A al punto B è:

$$L = \int_A^B m\,w\,dw = m\int_A^B w\,dw = \frac{1}{2}m\left(w_B{}^2 - w_A{}^2\right) \qquad (4.10)$$

Da questa equazione si osserva che il lavoro compiuto dipende unicamente dai valori assunti dalla velocità all'inizio e alla fine della traiettoria o più precisamente dal valore che nel punto di inizio e fine della traiettoria assume il prodotto $m\ w^2/2$.

Essendo stato eseguito sul corpo un lavoro si dice che esso ha acquistato una quantità di energia pari a tale lavoro. Questa energia che un corpo possiede in virtù del suo moto è detta ***energia cinetica*** $\boldsymbol{E_k}$ e può essere espressa dalla relazione:

$$E_k = \frac{1}{2}mw^2 \qquad (4.11)$$

Esaminiamo ora l'energia associata all'attrazione gravitazionale agente fra la terra e altri oggetti in prossimità della sua superficie. Consideriamo il sistema formato dalla terra e da un oggetto di massa *m* e supponiamo ora di sollevare tale oggetto, inizialmente in quiete, fino a una posizione situata ad una certa altezza *h* al di sopra della posizione iniziale e di lasciare l'oggetto di nuovo fermo. E' chiaro che è stato eseguito del lavoro contro la forza di gravità $m\boldsymbol{g}$, ma non è avvenuta una variazione di velocità e perciò esso non ha immagazzinato energia cinetica. L'oggetto, però, possiede un'energia in virtù della sua posizione come è facile accertare lasciandolo cadere. Dopo essere caduto da una quota h l'oggetto acquisterà una velocità w pari a:

$$w = \sqrt{2gh}$$

e la sua energia cinetica sarà:

$$E_k = \frac{1}{2}mw^2 = \frac{1}{2}m\cdot(2gh) = mgh$$

L'oggetto prima di cadere ha quindi una quantità di energia *m g h* che ha la possibilità di trasformarsi, cadendo, in energia cinetica.

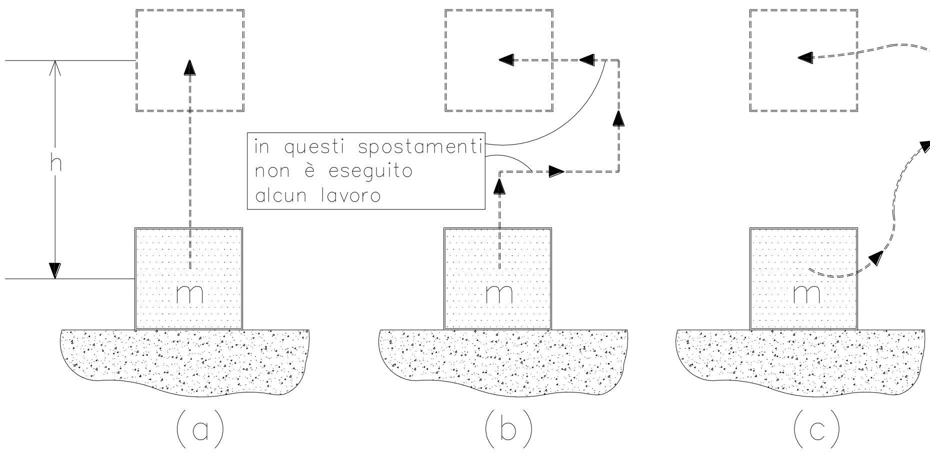
Il lavoro eseguito contro la forza di gravità per sollevare un oggetto è in esso immagazzinata sotto forma di energia. Questa energia che il corpo possiede in virtù della sua posizione è chiamata ***energia potenziale*** del corpo E_p e può essere espressa dalla relazione:

$$E_p = m\ g\ h \qquad (4.12)$$

in cui h è l'altezza della posizione del corpo rispetto ad una quota fissata come riferimento, scelta in maniera arbitraria.

4.3 Forze conservative

E' importante a questo punto notare come essendo la forza gravitazionale diretta sempre verticalmente verso il basso non occorre (in assenza di attrito) alcuna forza, e quindi lavoro, per spostare un oggetto in direzione orizzontale con velocità costante. Ne consegue che, in assenza di attriti, se si scelgono due percorsi differenti per sollevare un oggetto all'altezza *h* come in figura, la quantità di lavoro è la stessa cioè *mgh*.



Ogni spostamento arbitrario può essere scomposto in due componenti una orizzontale e una verticale: solo il moto verticale richiede che si esegua lavoro, il moto orizzontale non richiede alcun lavoro.

Perciò il moto di un oggetto da una posizione ad un'altra contro la *forza di gravità* che è *costante in modulo e direzione* richiede la stessa quantità di lavoro qualunque sia il percorso seguito. Si vede allora, in altre parole, che il *lavoro compiuto da tale forza dipende unicamente dalle posizioni iniziali e finali* che caratterizzano lo spostamento. Da notare che se il corpo viene spostato lungo una *traiettoria chiusa* su se stessa (ovvero *se la posizione iniziale e finale che descrivono lo spostamento coincidono*) *il lavoro compiuto dalla forza è nullo*.

Una forza la quale sia caratterizzata dalla proprietà che la quantità di lavoro eseguito contro di essa dipende solo dalla posizione iniziale e finale dell'oggetto spostato è detta *forza conservativa*. La forza gravitazionale che esiste in prossimità della superficie terrestre è manifestamente una forza conservativa

4.4 CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA

L'energia cinetica e l'energia potenziale sono dunque due forme in cui si può presentare l'energia di un corpo. Durante il moto del corpo queste due forme di energia, in generale, variano da istante a istante: l'energia cinetica E_k varia se varia la velocità del corpo, l'energia potenziale E_p varia se varia la posizione del corpo. Esiste però una legge fondamentale della fisica, detta **legge di conservazione dell'energia meccanica**, la quale descrive il fatto che *se le forze che agiscono sul corpo considerato sono tutte conservative, la somma dell'energia cinetica e di quella potenziale si mantiene costante durante il moto*, cioè:

$$E_k + E_p = E = \text{costante} \tag{4.13}$$

La costante *E* ha il nome di energia meccanica del corpo. Questa legge ha una validità generale a condizione che sul corpo non agiscano forze dissipative, come l'attrito e la resistenza del mezzo in cui il corpo si muove. In generale si ha:

$$E_p = mg^2 \frac{t^2}{2} = m \frac{w^2}{2} = E_k \tag{4.14}$$

In un campo conservativo, in altre parole, la diminuzione dell'energia di posizione equivale ad un aumento dell'energia cinetica del corpo; l'energia meccanica di un corpo permane invariata sebbene si possa trasformare da energia cinetica in energia di posizione e viceversa.

4.5 CAMPI DI FORZE CONSERVATIVI

Una regione dello spazio in cui agisca un determinato sistema di forze viene detto *campo* di tali forze. In ogni punto di tale regione è definita la forza la cui intensità è funzione solo della posizione considerata. Quando la forza che lo caratterizza è conservativa il campo viene detto *conservativo* ed il lavoro per spostare un corpo al suo interno non dipende dal percorso effettuato ma solamente dalle posizioni iniziali e finali. Tre esempi di campi di forza conservativi sono:

1) *il campo della forza peso*, cioè una regione dello spazio vicina alla superficie terrestre tale che l'accelerazione di gravità possa considerarsi costante in tutti i suoi punti: un corpo di massa *m* é soggetto alla forza $m\mathbf{g}$;

2) *il campo della forza gravitazionale terrestre (o di ogni altro corpo celeste),* in ogni punto dello spazio intorno alla terra un corpo di massa m é soggetto ad una forza diretta verso il centro della terra di intensità Gm_Tm/r^2 dove *G* é la costante di gravitazione universale, m_T é la massa della terra r^2 la distanza del corpo dal centro della terra;

3) *il campo elettrico generato da una carica puntiforme Q:* una seconda carica *q* é soggetta ad una forza diretta verso la prima di intensità proporzionale a $Q\ q/\ r^2$ (Legge di Coulomb) con r^2 la distanza delle due cariche.

Allo stesso modo di quanto fatto per la forza gravitazionale in ogni campo conservativo é possibile definire una *energia potenziale* funzione della posizione dei corpi all'interno del campo. Il *lavor*o effettuato dalle forze di un campo conservativo (o contro le forze di un campo conservativo) per ottenere lo spostamento di un corpo all'interno del campo stesso *sarà pari alla corrispondente variazione dell'energia potenziale o energia di posizione*.
All'interno di un campo conservativo l'*energia potenziale* è una funzione delle coordinate tale che la differenza tra i suoi valori iniziale e finale è uguale al lavoro compiuto su di un corpo per spostarlo dalla posizione iniziale alla posizione finale.

APPLICAZIONI

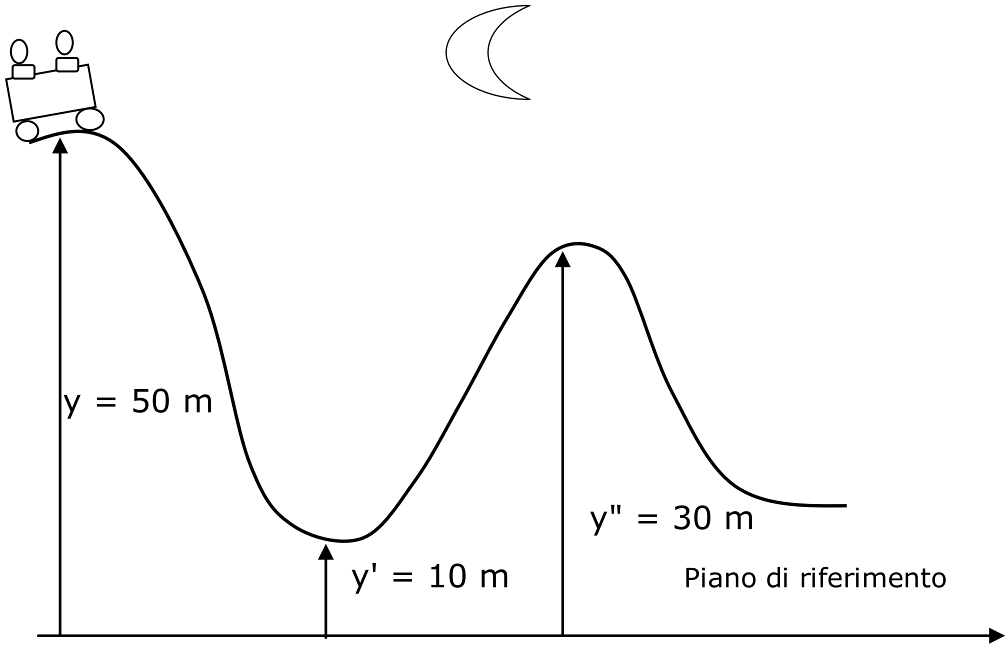
Si lancia un sasso verso l'alto a velocità w_s = 3 m/s. Quale altezza massima raggiunge? Tale altezza dipende dalla massa del corpo?

Per risolvere il quesito si pensi di applicare la conservazione dell'energia (eq. 4.13) nelle due posizioni: 1) iniziale, per cui w_s = 3 m/s e altezza y = h;
2) finale, nella quale w'_s = 0 m/s e y = h'.
Ne segue che:

$$\frac{1}{2}\ m w_s^2 + mgh = \frac{1}{2}\ m w'^2_s + mgh'$$

ovvero: $\Delta h = h' - h = w_s^2/(2\ g) = 0{,}46$ m
e tale altezza non dipende dalla massa.

Il carrello della figura seguente parte da velocità iniziale pari a 4 m/s e da un'altezza pari a y = 50 m. Quale velocità ha raggiunto quanto si trova alla quota y' = 10 m? E all'altezza y" = 30 m ?
Si ipotizzino trascurabili gli attriti.



Ancora un'applicazione della relazione (4.13) per le seguenti condizioni:

posizione 1)	w_c = 4 m/s	y = 50 m
posizione 2)	w'_c = ?	y' = 10 m
posizione 3)	w''_c = ?	y" = 30 m

$$\frac{1}{2} m w_c^2 + m g y = \frac{1}{2} m w_c'^2 + m g y' = \frac{1}{2} m w_c''^2 + m g y''$$

$$w'_c = \sqrt{g w_c^2 + 2 g (y - y')} = 30{,}7\, m/s$$

$$w''_c = \sqrt{g w_c^2 + 2 g (y - y'')} = 23{,}4\, m/s$$

Bibliografia

A. Cavallini, L. Mattarolo, *Termodinamica Applicata,* Ed. CLEUP - Padova, 1992

G. Rogers, Y. Meyhew, *Engineering Thermodynamics, Work and Heat Transfer,* Longman.

R. Sonntag, C Borgnakke, G. Van Wylen, *Fundamentals of Thermodynamics,* John Wyley & Sons Inc - 5th Edition.