ALCUNI RICHIAMI GENERALI

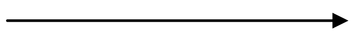
0.1 SUL CONCETTO DI VETTORE

La direzione

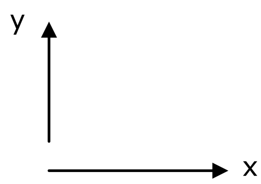
Data una linea retta, è possibile muoversi su questa in due versi opposti: si possono distinguere assegnando a ciascuno di essi un segno (più e meno).

Diciamo che una retta è orientata una volta che è stato fissato su di essa il verso positivo: sono un esempio di retta orientata agli assi orientati x e y di un sistema di riferimento cartesiano. In generale il verso positivo è indicato con una freccia.

Una retta orientata (asse) definisce una direzione.



Retta orientata



Assi coordinati orientati

Scalari e vettori

Molte quantità fisiche sono determinate in modo completo dalla loro grandezza, espressa nella corretta unità di misura: tali grandezze sono dette *scalari*.

Esempio: per determinare il volume di un corpo è necessario indicare solo il valore espresso in [m^3]; la temperatura di un corpo è completamente descritta dal valore in [°C].

Per essere completamente determinate altre quantità fisiche richiedono la specificazione anche di una direzione, oltre alla loro grandezza (modulo).

Tali quantità sono dette *vettoriali* o vettori.

Un esempio è lo spostamento di un corpo: tale quantità è completamente definita non solo noto il valore della distanza percorsa, ma una volta specificata la direzione in cui il corpo si è mosso.

Anche altre quantità fisiche, quali la velocità, la forza, l'accelerazione sono grandezze vettoriali.

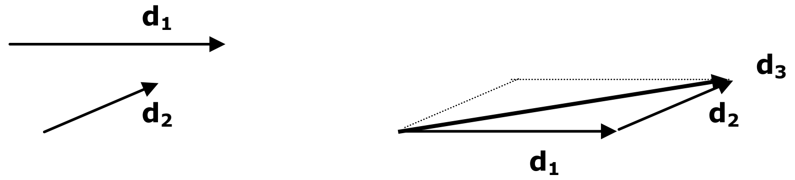
I vettori sono rappresentabili graficamente da segmenti aventi la medesima direzione del vettore (freccia) e lunghezza (modulo) proporzionale alla grandezza.

Un vettore unitario è un vettore il cui modulo è 1; in genere tale vettore è definito *versore* **u**. Un qualsiasi vettore può essere espresso come multiplo del versore **u** che possiede la stessa direzione. Una quantità vettoriale è quindi indicata in tal modo:

$$\mathbf{V} = v\,\mathbf{u}$$

dove v è il modulo della quantità in oggetto, **u** il versore.

Le grandezze vettoriali sono sommabili come indicato in figura, in cui il vettore $\mathbf{d_3}$ è la somma di $\mathbf{d_1}$ e $\mathbf{d_2}$ (Regola del Parallelogramma).



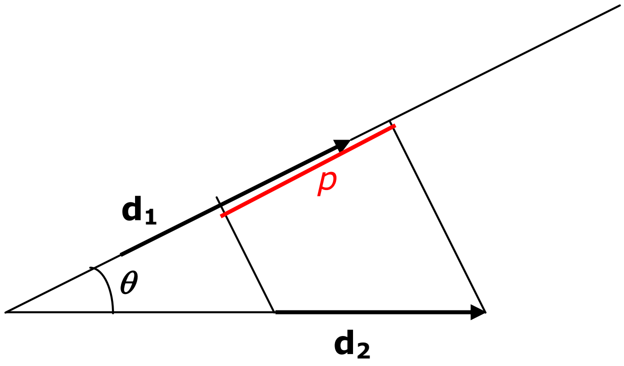
Per calcolare il modulo d_3 del vettore somma, è necessaria la conoscenza dell'angolo θ tra i due vettori.

In tal modo si ottiene che:

$$d_3 = \sqrt{d_1 + d_2 + 2 \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \cos\theta}$$

Prodotto scalare

L'operazione $\mathbf{d_1} \cdot \mathbf{d_2}$ (si legge: "$\mathbf{d_1}$ scalare $\mathbf{d_2}$" e talvolta si scrive: $\mathbf{d_1}$ x $\mathbf{d_2}$) è detta prodotto scalare tra i vettori $\mathbf{d_1}$ e $\mathbf{d_2}$. Si definisce prodotto scalare tra due vettori una quantità scalare data dal prodotto dei due vettori per il coseno dell'angolo tra essi compreso.



Risulta, pertanto, che:

$$\mathbf{d_1} \cdot \mathbf{d_2} = d_1\, d_2 \cos\theta$$

dove d_1 e d_2 sono i moduli dei due vettori e θ è l'angolo costituito dalle direttrici dei vettori stessi. Al secondo membro dell'uguaglianza il prodotto ($d_2 \cos\theta$) non è altro che la proiezione *p* del vettore d_2 sul vettore d_1.

Il prodotto scalare di due vettori, essendo uno scalare può risultare positivo, negativo o nullo; in particolare il prodotto scalare è:

- positivo se $0 \le \theta < 90°$
- negativo se $90° < \theta \le 180°$

- nullo se $\theta = 90°$

Il prodotto scalare gode della proprietà commutativa per cui:

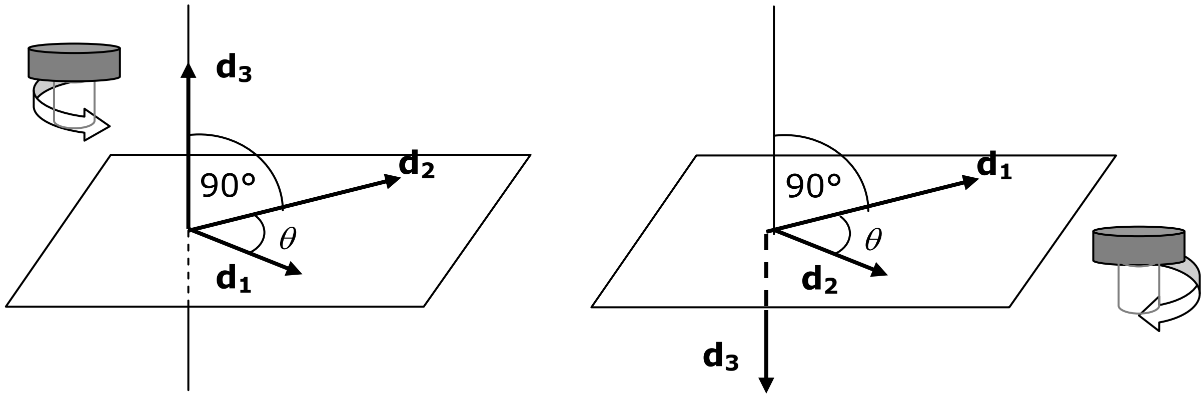
$$\mathbf{d_1} \cdot \mathbf{d_2} = \mathbf{d_1}\,\mathbf{d_2} \cos\theta = \mathbf{d_2}\,\mathbf{d_1} \cos\theta = \mathbf{d_2} \cdot \mathbf{d_1}$$

Prodotto vettoriale

L'operazione $\mathbf{d_1}$ x $\mathbf{d_2}$ (si legge: $\mathbf{d_1}$ vettore $\mathbf{d_2}$) è detta prodotto vettoriale tra il vettore $\mathbf{d_1}$ e il vettore $\mathbf{d_2}$. Il prodotto vettoriale di due vettori è un vettore $\mathbf{d_3}$ avente direzione perpendicolare al piano su cui giacciono $\mathbf{d_1}$ e $\mathbf{d_2}$ e modulo pari a:

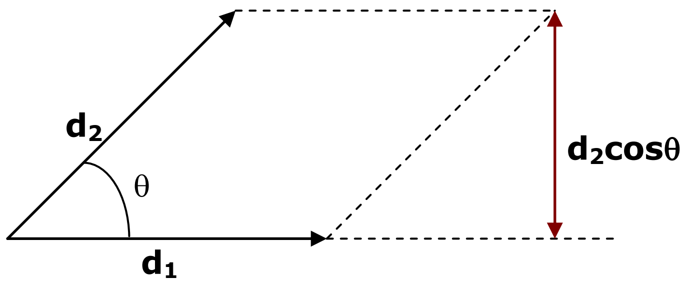
$$d_3 = d_1\, d_2\, \text{sen}\theta$$

dove θ è l'angolo non maggiore di 180° formato dai due vettori.



Il verso del vettore risultante è quello di una vite che segue la rotazione del primo vettore ($\mathbf{d_1}$) sul secondo ($\mathbf{d_2}$), ricordando che l'avvitamento avviene in senso orario e lo svitamento avviene in senso antiorario.

Si deduce facilmente che il modulo del prodotto vettoriale è uguale all'area del parallelogramma individuato dai due vettori:



Area = base x altezza = $d_1\, d_2 \cos\theta = d_3$

0.2 GLI ANGOLI

Gli angoli piani

Un angolo piano α è una porzione di piano delimitata da due semirette a e b uscenti da uno stesso punto O, che prende il nome di vertice dell'angolo, mentre le due semirette sono dette lati. Le unità di misura per misurare gli angoli sono:

- la prima, facendo riferimento all'angolo retto, considera come unità di misura 1/90 di tale angolo ed è detta **grado**;
- la seconda è detta **radiante**; essa fa riferimento ad una circonferenza generica e considera come unitario un angolo avente il vertice nel centro della circonferenza e tale che l'arco da esso intercettato abbia lunghezza uguale al raggio.

Misure in gradi

Dalla definizione stessa dell'unità di misura deriva che l'angolo retto misura 90 gradi, la metà di un angolo retto 45 gradi, un angolo piatto 180 gradi, e così via. Il grado ha due sottomultipli sessagesimali che sono il primo (pari a 1/60 di grado) e il secondo (pari a 1/60 di primo, ovvero 1/3600 di grado).Ciò significa che anziché dire che la quarta parte di un angolo retto misura 11,5 gradi, si dice che misura 22 gradi e 30 primi (si scrive 22° 30').

Esempio 1: quanto misura l'ottava parte di un angolo di 90°?

90 gradi / 8 = 11,25 gradi

ovvero, ricordando che ogni grado equivale a 60 primi, avremo:

11,25 gradi = 11 gradi e (0,25 X 60) primi = 11° 15'

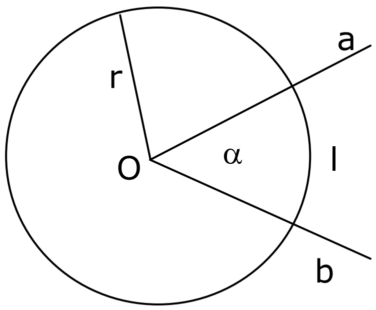
Esempio 2: quanto vale la sedicesima parte di un angolo retto?

90/16 di grado = 5,625 gradi =
= 5 gradi e (0,625 X 60) primi =
= 5 gradi e 37,5 primi =
= 5 gradi, 37 primi e (0,5 X60) secondi =
= 5° 37' 30''

Misure in radianti

Dalla definizione di radiante emerge che poiché l'angolo giro individua l'intera circonferenza, che ha lunghezza $2\pi r$, se il raggio è r, ne deriva che la misura in radianti dell'angolo giro è 2π radianti. Poiché l'angolo retto è la quarta parte di un angolo giro, la sua misura in radianti è $2\pi/4 = \pi/2$. In generale la misura in radianti di un angolo α è, per definizione, il rapporto l/r tra la lunghezza l dell'arco individuato da

α su una circonferenza di centro nel vertice di α e il raggio della circonferenza. Tale misura è indipendente dalla circonferenza considerata.



Esempio 3: quanti radianti misura un angolo di 20°?

20° : x radianti = 360° : 2π

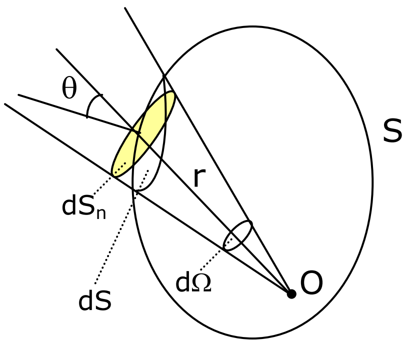
x = (20 x 2π)/360

essendo $\pi \cong 3{,}14$

x = 0,348 radianti

L'angolo solido

Un angolo solido è quella porzione di spazio delimitata da un conoide di vertice O. L'angolo solido si misura in steradianti. Si definisce steradiante l'angolo solido che intercetta un'area di 1m^2 sulla superficie di una sfera avente il raggio di 1m e il centro nel vertice dell'angolo stesso.



Si consideri la figura; sia dS_n la proiezione dell'elemento di superficie dS intercettato dall'angolo solido $d\Omega$ sulla superficie S. Il rapporto dS_n/r^2 rappresenta l'angolo solido $d\Omega$ del cono, con vertice O, delimitato dalla superficie dS. Inoltre $dS_n = dS \cos\theta$.

0.3 NOZIONI ELEMENTARI DI ANALISI MATEMATICA

DEFINIZIONI

FUNZIONE

Dati due insiemi di numeri reali, A e B, una funzione di A in B è una legge che, ad ogni elemento di A, fa corrispondere un elemento di B.

Si denota questa corrispondenza con:

$$f: A \rightarrow B$$

oppure $y = f(x)$

A è il dominio di definizione della funzione f.

Esempi

A) $f(x) = 2x + 1$

è una funzione lineare definita su tutto l'insieme dei numeri reali.

Una funzione lineare è rappresentabile con la relazione generica:

$$y(x) = m x + q$$

m mi indica la pendenza della retta e q l'intercetta della stessa sull'asse delle ordinate ($x = 0$).

B) $f(x) = 1/x$

è definita nel campo dei numeri reali, ma non per $x = 0$.

C) $f(x) = e^x$

funzione esponenziale ($e = 2,7182$ ...) definita nel campo dei numeri reali

D) $f(x) = \log x$

Funzione logaritmica è definita solo se $x > 0$. La base della funzione logaritmica può essere il valore *e* oppure *10*.

LIMITE

Un numero reale a è il limite della funzione f(x) se x tende a x_0 ($x \rightarrow x_0$), se e solo se, qualunque sia il valore di $\varepsilon > 0$ (e piccolo a piacere), esiste un numero $\delta > 0$ tale che: $a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon$ per ogni $x \rightarrow x_0$ nell'intervallo di valori $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$.

Si scrive:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

Limiti molto importanti sono quelli della funzione esponenziale:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

Non esistono i limiti, per $x \rightarrow \infty$, delle funzioni periodiche:

$$y(x) = \sin(x); \qquad y(x) = \cos(x)$$

Il concetto di limite è introdotto per studiare le funzioni in prossimità dei loro punti singolari: ciò consente di precisare se le funzioni sono continue in un determinato intervallo di valori o nel loro insieme di definizione.

DERIVATA

Se una funzione f(x) è definita in un intorno del punto x_0 (è definita cioè in un intervallo di valori che contiene x_0, e se esiste ed è finito il limite (rapporto incrementale):

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

in cui $h \neq 0$, si dice che la funzione f(x) è derivabile in x_0.

Il limite è appunto la derivata della funzione. L'operazione di derivazione può essere indicato in uno dei modi seguenti:

$f'(x)$; $d\,f(x)/\,d\,x$; y'; $D\,f(x); \dots$

La funzione f(x) può essere derivabile in un certo intervallo o nell'intero insieme di definizione.

Un esempio molto semplice di calcolo di derivata può essere fornito da una generica funzione lineare: $y(x) = m\,x + q$

$$y'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{[m(x_0 + h) + q - (m x_0 + q)]}{h} = \frac{mh}{h} = m$$

e tale risultato è valido per qualsiasi valore di x_0.

Si può facilmente verificare che la funzione f(x) = x non è derivabile per x = 0.

Esempi

$D[f(x) \pm g(x)] = D\,f(x) \pm D\,g(x)$

$D\,[f(x) \cdot g(x)] = f(x) \cdot Dg(x) + g(x) \cdot Df(x)$

$D\,x^n = n \cdot x^{(n-1)}$

$D\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g \cdot Df(x) - f \cdot Dg(x)}{g^2(x)}$ valida per $g(x) \neq 0$

$D\cos(x) = -\sin(x)$

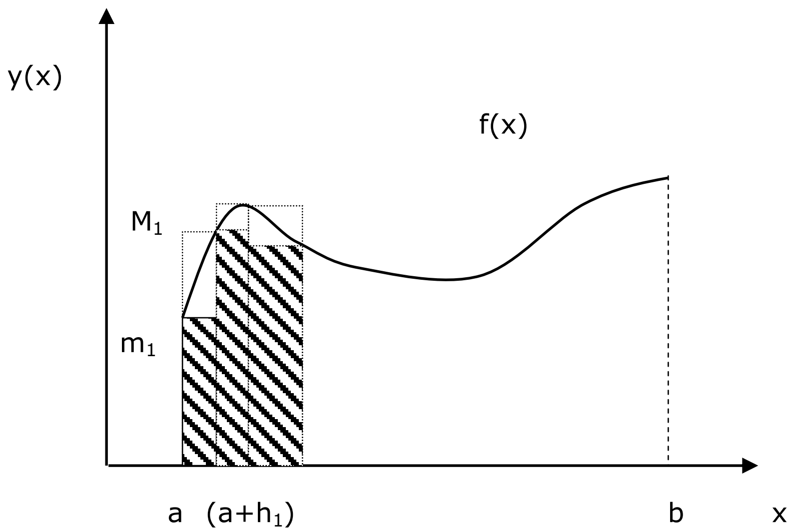
$D\sin(x) = \cos(x)$

$D\,e^x = e^x$

$D\log_e x = 1/x$

INTEGRALE

Si consideri una funzione y = f(x) qualsiasi e la sua rappresentazione in un sistema di assi cartesiani ortogonale (vedi figura) effettuata in un intervallo di valori [a, b].



Dividiamo l'intervallo considerato in un numero arbitrario di parti di ampiezza h_1, h_2, h_3, …, h_n, a partire dal punto x = a. Siano m_1 e M_1, m_2 e M_2, … , m_n e M_n i valori assunti dalla funzione y(x) nei punti di massimo e di minimo in ciascuna porzione dell'intervallo definito.

E' possibile in questo modo definire, per ciascuna porzione di intervallo, due rettangoli di area $h_i \times m_i$ e $h_i \times M_i$, rispettivamente considerando i valori di minimo o di massimo della funzione. Sommiamo i valori di queste superfici così ricavate (minimi con minimi e massimi con massimi) per ottenere s (somma delle superfici $h_i \times m_i$) e S (sommatoria delle superfici $h_i \times M_i$).

La superficie A che ha per contorno l'asse ordinato delle ascisse x e la funzione stessa, ha estensione compresa tra s ed S, ovvero:

$$s = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot h_i < A < \sum_{j=1}^{M} m_j \cdot h_j = S$$

Al tendere a zero dell'estensione degli intervalli, le somme s ed S tendono ad identificarsi con A:

$$A = \lim_{hi \to 0} \Sigma_i \, [f(x_i) \cdot h_i]$$

Tale limite è detto integrale definito e viene indicato con la seguente scrittura:

$$\int_a^b f(x)\, dx = A$$

x è detta variabile di integrazione, a e b sono gli estremi dell'intervallo di integrazione.

Esempi

$\int e^x \, dx = e^x$

$D \int f(x)\, dx = f(x)\, dx$

$\int \sin(x) \, dx = - \cos(x)$

Bibliografia

A.Puppo, *Prontuario e formulario di Matematica,* Patron Editore, Bologna, 1982

M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, 1982

G. Panzarosa, S. Tribulato, *Vettori - Esercizi*, Edizioni Tecnos, Milano, 1984