Matematica – Test 6 (iuav)

1) Il *prodotto vettoriale* non è associativo. Verificare che ad esempio si ha $(\bar{k} \wedge \bar{\imath}) \wedge \bar{\imath} \neq \bar{k} \wedge (\bar{\imath} \wedge \bar{\imath})$.

2) Verificare che (se $\bar{v}_1$ e $\bar{v}_2$ non sono paralleli né nulli) $\bar{v}_1 \wedge \bar{v}_2$ è ortogonale a $\bar{v}_1 + \bar{v}_2$.

3) Qual è l'area del triangolo di vertici $\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\bar{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$?

4) Se $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ e $\bar{v}_4$ sono 4 vettori qualsiasi dello spazio, dire (giustificando la risposta) quali delle seguenti espressioni non è calcolabile:
   a) $\bar{v}_1 \cdot (\bar{v}_2 \wedge \bar{v}_3)$
   b) $\bar{v}_1 \wedge (\bar{v}_2 \cdot \bar{v}_3)$
   c) $\bar{v}_1 \wedge (\bar{v}_2 \wedge \bar{v}_3)$
   d) $\bar{v}_1 \cdot (\bar{v}_2 \cdot \bar{v}_3)$
   e) $(\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2) \wedge (\bar{v}_3 \cdot \bar{v}_4)$
   f) $(\bar{v}_1 \wedge \bar{v}_2) \cdot (\bar{v}_3 \wedge \bar{v}_4)$

5) Calcolare tutti i *versori* ortogonali ai vettori $\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

6) Un *tetraedro* è un solido avente 4 vertici e 4 facce triangolari. Mostrare che, se un tetraedro ha vertici $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ e $\bar{v}_4$, allora $\bar{w}_1 + \bar{w}_2 + \bar{w}_3 + \bar{w}_4 = \bar{0}$ se $\bar{w}_i$ (per $i = 1,2,3,4$) è il vettore ortogonale alla faccia opposta al vertice $\bar{v}_i$, avente modulo pari all'area della faccia e verso che punta all'esterno del tetraedro.

7) Mostrare che $\bar{u} \cdot (\bar{v} \wedge \bar{w}) = (\bar{u} \wedge \bar{v}) \cdot \bar{w}$ se $\bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $\bar{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ e $\bar{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ sono tre qualsiasi vettori dello spazio.

8) Mostrare che $\bar{u} \wedge (\bar{v} \wedge \bar{w}) = (\bar{u} \cdot \bar{w})\bar{v} - (\bar{u} \cdot \bar{v})\bar{w}$ se $\bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $\bar{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ e $\bar{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ sono tre qualsiasi vettori dello spazio.

9) Se $\bar{u} \cdot \bar{v} = \sqrt{3}$ e $\bar{u} \wedge \bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, qual è l'angolo α tra i vettori $\bar{u}$ e $\bar{v}$? (L'esercizio suggerisce che noti il prodotto scalare e il prodotto vettoriale tra due vettori, è noto allora anche l'angolo tra i vettori). Suggerimento: calcolare prima $\tan \alpha$.

10) Quali sono le *equazioni cartesiane* della *retta mediana* relativa al lato $\bar{v}_2\bar{v}_3$ nel triangolo di vertici $\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}$ e $\bar{v}_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$? (La *retta mediana* di $\bar{v}_2\bar{v}_3$ è la retta che congiunge il vertice $\bar{v}_1$ al punto medio di $\bar{v}_2\bar{v}_3$).

11) Quali sono le *equazioni normali* della retta r_1 passante per il punto $\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ e parallela alla retta $r_2 \begin{cases} x - 3y - 2z + 20 = 0 \\ 2x + 4y - z - 3 = 0 \end{cases}$?