Soluzioni del Test 5 (iuav).

1) Siccome $det(A) = 0$ e $det(B) = 5 \neq 0$, B è invertibile e A no. $B^{-1} = \begin{pmatrix} -2/5 & 1/5 & -1/5 \\ 1/5 & 2/5 & -2/5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2) Ad esempio, nel caso primo sistema si ha: $det(A) = -20 \neq 0$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/20 & -1/4 & 1/10 \\ 3/20 & 1/4 & 3/10 \\ 3/10 & 1/2 & -2/5 \end{pmatrix}$

   e la soluzione è unica ed è data da $A^{-1}\bar{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3) Sia $B = (b_{Ji})$ una matrice 3×3 tale che $AB = I_3$. Allora $A\bar{b}_{*1} = \bar{\imath}$, $A\bar{b}_{*2} = \bar{\jmath}$ e $A\bar{b}_{*3} = \bar{k}$ (dove $\bar{\imath}$, $\bar{\jmath}$ e $\bar{k}$ sono i versori degli assi). Poiché $det(A) \neq 0$, per risolvere questi 3 sistemi possiamo applicare la regola di Cramer, Per il sistema di equazioni $A\bar{b}_{*1} = \bar{\imath}$ otteniamo $b_{11} = \frac{\det(\ \bar{\imath},\ \bar{a}_{*2}\ ,\ \bar{a}_{*3}\ )}{\det A} = \frac{A_{11}}{det\,A}$, $b_{21} = \frac{\det(\ \bar{a}_{*1}\ ,\ \bar{\imath}\ ,\ \bar{a}_{*3}\ )}{\det A} = \frac{A_{12}}{det\,A}$ e $b_{31} = \frac{\det(\ \bar{a}_{*1}\ ,\ \bar{a}_{*2}\ ,\ \bar{\imath}\ )}{\det A} = \frac{A_{13}}{det\,A}$. Idem per gli altri 2 sistemi.

4) a) 0 b) 1 c) 2 d) 2 e) 2 f) 3 g) 3

5) Nel seguito indichiamo con A la matrice dei coefficienti e con $\bar{b}$ il vettore dei termini noti.

   a. Non ha soluzioni perché $rango\begin{pmatrix} 5 & -10 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 1$, mentre $rango\begin{pmatrix} 5 & -10 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2$.

   b. Ha soluzioni perché $rango\begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = -2$, e quindi anche la matrice estesa ha rango 2 (perché ha 2 righe). E applicando la regola di Cramer si trova
   $x_1 = \frac{det\begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}{det\begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}} = 2$ e $x_2 = \frac{det\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}{det\begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}} = 1$, cioè l'unica soluzione è $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   c. Ha soluzioni perché $rango\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = 1 = rango\begin{pmatrix} -2 & 6 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$; ricavando ad esempio x_1 dalla prima equazione, le infinite soluzioni al variare di x_2 sono $\begin{pmatrix} 3x_2 - 1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

   d. Ha soluzioni perché $rango\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 3$, e quindi anche la matrice estesa ha rango 3 (perchè ha 3 righe). Applicando la regola di Cramer, siccome $det(A) = 8$, si ha

   $$x_1 = \frac{det\begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & -1 \end{pmatrix}}{8} = -1\ x_2 = \frac{det\begin{pmatrix} -1 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & -4 & -1 \end{pmatrix}}{8} = 1\ x_3 = \frac{det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}}{8} = 2 \text{ e}$$

   dunque l'unica soluzione è $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

e. Ha soluzioni perché $det(A) = -6$, e quindi $rango(A) = 3 = rango(A|\bar{b})$ (dato che $A|\bar{b}$ ha 3 righe); l'unica soluzione è $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

f. Non ha soluzioni perché $rango(A) = 2 \neq 3 = rango(A|\bar{b})$.

g. Ha soluzioni perché $rango(A) = 2 = rango(A|\bar{b})$; eliminando ad esempio la terza riga (perché le prime 2 righe contengono un minore con determinante non nullo di ordine 2) e portando a secondo membro i termini con la variabile x_3 (che vengono perciò trattati come dei termini noti). Si ottengono al variare di x_3 le infinite soluzioni $\begin{pmatrix} \frac{-2+2x_3}{-3} \\ \frac{-5-x_3}{-3} \\ x_3 \end{pmatrix}$.